

# Тригонометрические выражения

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

**Автор**

Трепачёв Дмитрий

# Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно тригонометрические выражения? Потому что тригонометрия — одна из самых важных и одновременно самых пугающих тем в школьной математике. Синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы... Горы формул, которые нужно запомнить, бесконечные преобразования, коварные знаки в разных четвертях... Но на самом деле за всем этим хаосом скрывается стройная и красивая система.

В школьных учебниках тригонометрические формулы обычно разбросаны по разным главам и классам. Основное тождество проходят в одном месте, формулы приведения — в другом, формулы сложения — в третьем, а формулы двойного угла — вообще в десятом классе. В результате ученик не видит общей картины и не понимает, как все эти формулы связаны между собой. Да и задач на отработку каждого типа формул часто не хватает.

В этой книге я собрал все основные формулы и приёмы упрощения тригонометрических выражений в одном месте:

- основное тригонометрическое тождество и его следствия;
- тангенс и котангенс, связь с синусом и косинусом;
- формулы приведения (правило "лошади");
- формулы сложения (синус, косинус, тангенс суммы и разности);
- формулы двойного и половинного угла;
- преобразование суммы в произведение;
- преобразование произведения в сумму;
- упрощение выражений с одним и двумя углами;
- доказательство тождеств;
- вычисление значений тригонометрических выражений.

Каждой группе формул посвящена отдельная глава с теорией, подробными примерами и большим количеством задач. После каждого логического блока есть обобщающая глава-практика, а в конце — итоговая глава «Практика на все-все приёмы», где собраны задачи всех типов вперемешку.

Особое внимание в книге уделяется не механическому запоминанию формул, а пониманию логики их вывода и связей между ними. Я показываю, как все формулы выводятся из небольшого числа базовых соотношений, и учу применять их в различных комбинациях.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте [books.mrepetitor.com](http://books.mrepetitor.com). Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте [study.mrepetitor.com](http://study.mrepetitor.com). Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

*Дмитрий Трепачёв*

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Табличные значения в градусах</b>	<b>7</b>
1.1	Теория . . . . .	7
1.2	Задачи . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Табличные значения в радианах</b>	<b>8</b>
2.1	Теория . . . . .	8
2.2	Задачи . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Знаки в разных четвертях</b>	<b>9</b>
3.1	Теория . . . . .	9
3.2	Задачи . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Формулы приведения</b>	<b>11</b>
4.1	Теория . . . . .	11
	Пример 1. Упрощение с изменением функции . . . . .	11
	Пример 2. Упрощение без изменения функции . . . . .	11
	Пример 3. Упрощение с изменением функции (радианы) . . . . .	11
	Пример 4. Упрощение с отрицательным аргументом . . . . .	12
4.2	Задачи . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Практика по блоку 1</b>	<b>14</b>
5.1	Теория . . . . .	14
5.2	Задачи . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Основное тригонометрическое тождество</b>	<b>17</b>
6.1	Теория . . . . .	17
	Пример 1. Нахождение синуса по известному косинусу . . . . .	17
	Пример 2. Нахождение косинуса по известному синусу . . . . .	17
	Пример 3. Когда четверть не указана . . . . .	18
	Пример 4. Упрощение выражения с использованием основного тождества . . . . .	18
	Пример 5. Ещё одно упрощение . . . . .	18
6.2	Задачи . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Связь тангенса с косинусом и синусом</b>	<b>20</b>
7.1	Теория . . . . .	20
	Пример 1. Нахождение косинуса по тангенсу . . . . .	20
	Пример 2. Упрощение выражения . . . . .	20
	Пример 3. Ещё одно упрощение . . . . .	20
7.2	Задачи . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Практика по блоку 2</b>	<b>22</b>
8.1	Теория . . . . .	22
8.2	Задачи . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Синус суммы и разности</b>	<b>24</b>
9.1	Теория . . . . .	24
	Пример 1. Вычисление синуса суммы двух известных углов . . . . .	24

Пример 2. Вычисление синуса разности . . . . .	24
Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	24
Пример 4. Доказательство тождества . . . . .	24
Пример 5. Решение уравнения . . . . .	25
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	25
9.2 Задачи . . . . .	25
<b>10 Косинус суммы и разности</b>	<b>27</b>
10.1 Теория . . . . .	27
Пример 1. Вычисление косинуса суммы двух известных углов . . . . .	27
Пример 2. Вычисление косинуса разности . . . . .	27
Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	27
Пример 4. Доказательство тождества . . . . .	27
Пример 5. Связь с синусом . . . . .	28
Пример 6. Решение уравнения . . . . .	28
Пример 7. Общий алгоритм . . . . .	28
10.2 Задачи . . . . .	28
<b>11 Тангенс суммы и разности</b>	<b>30</b>
11.1 Теория . . . . .	30
Пример 1. Вычисление тангенса суммы . . . . .	30
Пример 2. Вычисление тангенса разности . . . . .	30
Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	31
Пример 4. Доказательство тождества . . . . .	31
Пример 5. Решение уравнения . . . . .	31
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	31
11.2 Задачи . . . . .	31
<b>12 Практика по блоку 3</b>	<b>33</b>
12.1 Теория . . . . .	33
12.2 Задачи . . . . .	33
<b>13 Синус двойного угла</b>	<b>35</b>
13.1 Теория . . . . .	35
Пример 1. Вычисление синуса двойного угла по известному синусу . . . . .	35
Пример 2. Вычисление синуса двойного угла по известному тангенсу . . . . .	35
Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	35
Пример 4. Доказательство тождества . . . . .	36
Пример 5. Решение уравнения . . . . .	36
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	36
13.2 Задачи . . . . .	36
<b>14 Косинус двойного угла</b>	<b>38</b>
14.1 Теория . . . . .	38
Пример 1. По известному синусу . . . . .	38
Пример 2. По известному косинусу . . . . .	38
Пример 3. По известному тангенсу . . . . .	38
Пример 4. Упрощение выражения . . . . .	39
Пример 5. Доказательство тождества . . . . .	39
14.2 Задачи . . . . .	39
<b>15 Тангенс двойного угла</b>	<b>41</b>
15.1 Теория . . . . .	41
Пример 1. По известному тангенсу . . . . .	41
Пример 2. По известному синусу и косинусу . . . . .	41

Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	42
Пример 4. Доказательство тождества . . . . .	42
Пример 5. Решение уравнения . . . . .	42
15.2 Задачи . . . . .	42
<b>16 Формулы половинного угла . . . . .</b>	<b>44</b>
16.1 Теория . . . . .	44
Пример 1. По известному тангенсу . . . . .	44
Пример 2. По известному синусу и косинусу . . . . .	44
Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	45
Пример 4. Доказательство тождества . . . . .	45
Пример 5. Решение уравнения . . . . .	45
16.2 Задачи . . . . .	45
<b>17 Практика по блоку 4 . . . . .</b>	<b>47</b>
17.1 Теория . . . . .	47
17.2 Задачи . . . . .	47
<b>18 Сумма синусов и косинусов в произведение . . . . .</b>	<b>49</b>
18.1 Теория . . . . .	49
Пример 1. Преобразование суммы синусов . . . . .	49
Пример 2. Преобразование разности косинусов . . . . .	49
Пример 3. Упрощение выражения . . . . .	49
Пример 4. Решение уравнения . . . . .	50
Пример 5. Доказательство тождества . . . . .	50
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	50
18.2 Задачи . . . . .	50
<b>19 Произведение синусов и косинусов в сумму . . . . .</b>	<b>52</b>
19.1 Теория . . . . .	52
Пример 1. Преобразование произведения синусов . . . . .	52
Пример 2. Преобразование произведения косинусов . . . . .	52
Пример 3. Преобразование произведения синуса на косинус . . . . .	52
Пример 4. Упрощение выражения . . . . .	52
Пример 5. Решение уравнения . . . . .	53
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	53
19.2 Задачи . . . . .	53
<b>20 Практика по блоку 5 . . . . .</b>	<b>56</b>
20.1 Теория . . . . .	56
20.2 Задачи . . . . .	56
<b>21 Упрощение выражений с одним углом . . . . .</b>	<b>58</b>
21.1 Теория . . . . .	58
Пример 1. Упрощение с приведением к общему знаменателю . . . . .	58
Пример 2. Упрощение с использованием основного тождества . . . . .	58
Пример 3. Упрощение с понижением степени . . . . .	58
Пример 4. Упрощение с заменой тангенса . . . . .	59
Пример 5. Упрощение с вынесением общего множителя . . . . .	59
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	59
21.2 Задачи . . . . .	59
<b>22 Упрощение выражений с двумя углами . . . . .</b>	<b>61</b>
22.1 Теория . . . . .	61
Пример 1. Упрощение с помощью формул сложения . . . . .	61
Пример 2. Упрощение с помощью преобразования суммы в произведение . . . . .	61

Пример 3. Упрощение с помощью преобразования произведения в сумму . . . . .	61
Пример 4. Упрощение с использованием формул приведения . . . . .	61
Пример 5. Упрощение сложного выражения . . . . .	62
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	62
22.2 Задачи . . . . .	62
<b>23 Доказательство тождеств . . . . .</b>	<b>64</b>
23.1 Теория . . . . .	64
Пример 1. Простое тождество . . . . .	64
Пример 2. Тождество с тангенсом . . . . .	64
Пример 3. Тождество с преобразованием суммы в произведение . . . . .	64
Пример 4. Тождество с двойным углом . . . . .	65
Пример 5. Сложное тождество . . . . .	65
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	65
23.2 Задачи . . . . .	65
<b>24 Вычисление значений тригонометрических выражений . . . . .</b>	<b>68</b>
24.1 Теория . . . . .	68
Пример 1. Вычисление по известному синусу . . . . .	68
Пример 2. Вычисление значения выражения . . . . .	68
Пример 3. Вычисление с использованием формул приведения . . . . .	69
Пример 4. Вычисление с использованием формул двойного угла . . . . .	69
Пример 5. Вычисление с использованием формул половинного угла . . . . .	69
Пример 6. Общий алгоритм . . . . .	69
24.2 Задачи . . . . .	70
<b>25 Практика на все-все приёмы . . . . .</b>	<b>72</b>
25.1 Теория . . . . .	72
25.2 Задачи . . . . .	72

# Табличные значения в градусах

## Теория

В тригонометрии часто приходится иметь дело с углами, значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса которых можно запомнить наизусть. Эти углы называются **табличными**. Знание их значений — основа для дальнейшего изучения тригонометрии. Вот таблица:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

## Задачи

### 1. Вычислите:

1)  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

2)  $\operatorname{tg} 45^\circ - \sin 30^\circ$

3)  $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$

4)  $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$

5)  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

6)  $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$

7)  $\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$

8)  $2 \sin 30^\circ - \cos 60^\circ$

9)  $\sin 90^\circ + \cos 0^\circ$

10)  $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ}$

11)  $(\sin 45^\circ)^2$

12)  $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$

### 2. Найдите значение выражения:

1)  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

2)  $\cos 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin 45^\circ$

3)  $\frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}$

4)  $\frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} + \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

5)  $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$

6)  $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$

# Табличные значения в радианах

## Теория

В тригонометрии наряду с градусной мерой угла используется радианная мера. Радиан — это угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности. Для перевода из градусов в радианы используется формула:

$$\alpha \text{ (рад)} = \alpha \text{ (град)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Основные табличные углы в радианах и соответствующие им значения тригонометрических функций приведены в таблице ниже:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

## Задачи

### 1. Вычислите:

1)  $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}$

2)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6}$

3)  $\cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$

4)  $\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}}$

5)  $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$

6)  $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

7)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$

8)  $2 \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3}$

9)  $\sin \frac{\pi}{2} + \cos 0$

10)  $\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}}$

11)  $\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2$

12)  $\cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3}$

### 2. Найдите значение выражения:

1)  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$

2)  $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$

3)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}$

4)  $\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}}$

5)  $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$

6)  $\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$

# Знаки в разных четвертях

## Теория

Значение тригонометрической функции зависит не только от величины угла, но и от того, в какой четверти находится этот угол. В зависимости от четверти, синус, косинус, тангенс и котангенс могут быть положительными или отрицательными.

Таблица знаков по четвертям:

	I четверть	II четверть	III четверть	IV четверть
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

## Задачи

1. Определите знак выражения:

- |                                   |                                   |                                    |                                    |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin 100^\circ$               | 5) $\sin 200^\circ$               | 9) $\sin 300^\circ$                | 13) $\sin 350^\circ$               |
| 2) $\cos 100^\circ$               | 6) $\cos 200^\circ$               | 10) $\cos 300^\circ$               | 14) $\cos 350^\circ$               |
| 3) $\operatorname{tg} 100^\circ$  | 7) $\operatorname{tg} 200^\circ$  | 11) $\operatorname{tg} 300^\circ$  | 15) $\operatorname{tg} 350^\circ$  |
| 4) $\operatorname{ctg} 100^\circ$ | 8) $\operatorname{ctg} 200^\circ$ | 12) $\operatorname{ctg} 300^\circ$ | 16) $\operatorname{ctg} 350^\circ$ |

2. Определите знак выражения:

- |  |  |   |   |
|--|--|---|---|
| 1) $\sin \frac{2\pi}{3}$               | 5) $\sin \frac{4\pi}{3}$               | 9) $\sin \frac{5\pi}{3}$                | 13) $\sin \frac{7\pi}{6}$               |
| 2) $\cos \frac{2\pi}{3}$               | 6) $\cos \frac{4\pi}{3}$               | 10) $\cos \frac{5\pi}{3}$               | 14) $\cos \frac{7\pi}{6}$               |
| 3) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$  | 7) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$  | 11) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$  | 15) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$  |
| 4) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$ | 8) $\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$ | 12) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$ | 16) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$ |

3. В какой четверти находится угол  $\alpha$ , если:

- |                                       |  |  |
|---------------------------------------|--|--|
| 1) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ | 5) $\sin \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha > 0$ | 9) $\cos \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0$  |
| 2) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$ | 6) $\sin \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha < 0$ | 10) $\cos \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha < 0$ |
| 3) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$ | 7) $\sin \alpha < 0, \operatorname{tg} \alpha > 0$ | 11) $\cos \alpha < 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0$ |
| 4) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ | 8) $\sin \alpha < 0, \operatorname{tg} \alpha < 0$ | 12) $\cos \alpha < 0, \operatorname{ctg} \alpha < 0$ |

4. Определите знак произведения:

1)  $\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ$

2)  $\sin 200^\circ \cdot \operatorname{tg} 200^\circ$

3)  $\cos 300^\circ \cdot \operatorname{ctg} 300^\circ$

4)  $\sin 150^\circ \cdot \cos 240^\circ$

5)  $\operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{ctg} 315^\circ$

6)  $\sin 210^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ$

7)  $\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{4\pi}{3}$

8)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$

9)  $\sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$

# Формулы приведения

## Теория

Формулы приведения позволяют сводить тригонометрические функции от углов вида  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $2\pi \pm \alpha$  (и аналогично в градусах) к функциям от угла  $\alpha$ . Это значительно упрощает вычисления.

### Мнемоническое правило

#### 1. Определяем, меняется ли функция.

- Если в аргументе есть  $\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$  (вертикальная ось) — функция меняется на кофункцию:  $\sin \leftrightarrow \cos$ ,  $\text{tg} \leftrightarrow \text{ctg}$ .
- Если в аргументе есть  $\pi$  или  $2\pi$  (горизонтальная ось) — функция не меняется.

#### 2. Определяем знак.

- Считаем, что  $\alpha$  — острый угол ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).
- Определяем, в какой четверти находится исходный угол.
- Ставим знак исходной функции в этой четверти перед новой функцией.

## Пример 1

*Упрощение с изменением функции*

Дан  $\sin(90^\circ + \alpha)$ . Упростим его по формулам приведения:

1. Смотрим на аргумент:  $90^\circ$  — это вертикальная ось. Значит, функция меняется на кофункцию:  $\sin \rightarrow \cos$ .
2. Считаем, что  $\alpha$  — острый угол (например,  $30^\circ$ ). Тогда  $90^\circ + \alpha$  находится во II четверти.
3. Во II четверти синус положителен. Ставим перед новой функцией знак +.

Получаем:  $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ .

## Пример 2

*Упрощение без изменения функции*

Дан  $\cos(180^\circ - \alpha)$ . Упростим его по формулам приведения:

1. Смотрим на аргумент:  $180^\circ$  — это горизонтальная ось. Значит, функция не меняется: остаётся  $\cos$ .
2. Считаем, что  $\alpha$  — острый угол. Тогда  $180^\circ - \alpha$  находится во II четверти.
3. Во II четверти косинус отрицателен. Ставим перед функцией знак −.

Получаем:  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

## Пример 3

*Упрощение с изменением функции (радианы)*

Дан  $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ . Упростим его по формулам приведения:

1. Смотрим на аргумент:  $\frac{3\pi}{2}$  — это вертикальная ось. Значит, функция меняется на кофункцию:  $\text{tg} \rightarrow \text{ctg}$ .
2. Считаем, что  $\alpha$  — острый угол. Тогда  $\frac{3\pi}{2} + \alpha$  находится в IV четверти.
3. В IV четверти тангенс отрицателен. Ставим перед новой функцией знак −.

Получаем:  $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{ctg} \alpha$ .

## Пример 4

### Упрощение с отрицательным аргументом

Дан  $\sin(360^\circ - \alpha)$ . Упростим его по формулам приведения:

1. Смотрим на аргумент:  $360^\circ$  — это горизонтальная ось. Значит, функция не меняется: остаётся  $\sin$ .
2. Считаем, что  $\alpha$  — острый угол. Тогда  $360^\circ - \alpha$  находится в IV четверти.
3. В IV четверти синус отрицателен. Ставим перед функцией знак  $-$ .

Получаем:  $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .

## Задачи

1. Упростите выражения (приведите к функции от  $\alpha$ ):

- |                               |                               |   |  |
|-------------------------------|-------------------------------|---|--|
| 1) $\sin(90^\circ + \alpha)$  | 4) $\cos(180^\circ - \alpha)$ | 7) $\sin(360^\circ - \alpha)$             | 10) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$  |
| 2) $\cos(90^\circ + \alpha)$  | 5) $\sin(270^\circ - \alpha)$ | 8) $\cos(360^\circ - \alpha)$             | 11) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$  |
| 3) $\sin(180^\circ - \alpha)$ | 6) $\cos(270^\circ - \alpha)$ | 9) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$ | 12) $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)$ |

2. Упростите выражения (углы в радианах):

- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  | 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ | 7) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$  | 10) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$ |
| 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  | 5) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$          | 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ | 11) $\sin(-\alpha)$                     |
| 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ | 6) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$         | 9) $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$                       | 12) $\cos(-\alpha)$                     |

3. Вычислите значения, используя формулы приведения:

- |                                  |                                   |                                   |                                    |
|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin 120^\circ$              | 4) $\operatorname{ctg} 120^\circ$ | 7) $\operatorname{tg} 240^\circ$  | 10) $\cos 315^\circ$               |
| 2) $\cos 135^\circ$              | 5) $\sin 210^\circ$               | 8) $\operatorname{ctg} 210^\circ$ | 11) $\operatorname{tg} 330^\circ$  |
| 3) $\operatorname{tg} 150^\circ$ | 6) $\cos 225^\circ$               | 9) $\sin 300^\circ$               | 12) $\operatorname{ctg} 300^\circ$ |

4. Вычислите значения (углы в радианах):

- |                                       |  |  |   |
|---------------------------------------|--|--|---|
| 1) $\sin \frac{2\pi}{3}$              | 4) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$ | 7) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$  | 10) $\cos \frac{7\pi}{4}$               |
| 2) $\cos \frac{3\pi}{4}$              | 5) $\sin \frac{7\pi}{6}$               | 8) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$ | 11) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$ |
| 3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ | 6) $\cos \frac{5\pi}{4}$               | 9) $\sin \frac{5\pi}{3}$               | 12) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$ |

5. Упростите выражения и найдите их значения:

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1) $\sin 150^\circ + \cos 120^\circ$                            | 6) $\operatorname{tg}^2 150^\circ - \operatorname{ctg}^2 150^\circ$           | 10) $\frac{\sin \frac{7\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{3}}$                            |
| 2) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ$ | 7) $\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}$                                  | 11) $\sin^2 \frac{5\pi}{4} + \cos^2 \frac{7\pi}{4}$                              |
| 3) $\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ$                        | 8) $\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{4\pi}{3}$                                | 12) $\operatorname{tg}^2 \frac{11\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2 \frac{11\pi}{6}$ |
| 4) $\frac{\sin 300^\circ}{\cos 330^\circ}$                      | 9) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$ |  |
| 5) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 120^\circ$                        |   |  |

6. Докажите тождества (с помощью формул приведения):

1)  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

2)  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

3)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$

4)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

5)  $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

6)  $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

7)  $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$

8)  $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

9)  $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$

10)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$

11)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

12)  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

# Практика по блоку 1

## Теория

В этом блоке мы изучили основные понятия, необходимые для работы с тригонометрическими выражениями:

- **Табличные значения** тригонометрических функций для углов  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  (и соответствующих им радиан).
- **Знаки тригонометрических функций** в зависимости от четверти, в которой находится угол.
- **Формулы приведения** — правила, позволяющие сводить тригонометрические функции от углов вида  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $2\pi \pm \alpha$  к функциям от угла  $\alpha$ .

В этой главе собраны задачи на все эти темы вперемешку. Ваша задача — определить, какие знания нужно применить в каждом конкретном случае.

## Задачи

1. Заполните таблицу значений:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
sin					
cos					
tg					
ctg					

2. Заполните таблицу значений (радианы):

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin					
cos					
tg					
ctg					

3. Определите знак выражения:

- |                                  |                                    |   |   |
|----------------------------------|------------------------------------|---|---|
| 1) $\sin 95^\circ$               | 7) $\operatorname{tg} 190^\circ$   | 13) $\sin \frac{5\pi}{6}$               | 17) $\sin \frac{7\pi}{4}$               |
| 2) $\cos 95^\circ$               | 8) $\operatorname{ctg} 190^\circ$  | 14) $\cos \frac{5\pi}{6}$               | 18) $\cos \frac{7\pi}{4}$               |
| 3) $\operatorname{tg} 95^\circ$  | 9) $\sin 280^\circ$                | 15) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$  | 19) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$  |
| 4) $\operatorname{ctg} 95^\circ$ | 10) $\cos 280^\circ$               | 16) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$ | 20) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4}$ |
| 5) $\sin 190^\circ$              | 11) $\operatorname{tg} 280^\circ$  |   |   |
| 6) $\cos 190^\circ$              | 12) $\operatorname{ctg} 280^\circ$ |   |   |

4. Упростите выражения, используя формулы приведения:

- |                               |   |  |   |
|-------------------------------|---|--|---|
| 1) $\sin(90^\circ + \alpha)$  | 8) $\cos(360^\circ + \alpha)$                 | 14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  | 19) $\sin(2\pi - \alpha)$                                   |
| 2) $\cos(90^\circ - \alpha)$  | 9) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$     | 15) $\sin(\pi - \alpha)$                       | 20) $\cos(2\pi + \alpha)$                                   |
| 3) $\sin(180^\circ - \alpha)$ | 10) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$   | 16) $\cos(\pi + \alpha)$                       | 21) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  |
| 4) $\cos(180^\circ + \alpha)$ | 11) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$   | 17) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ | 22) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ |
| 5) $\sin(270^\circ + \alpha)$ | 12) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$  | 18) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ | 23) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$                       |
| 6) $\cos(270^\circ - \alpha)$ | 13) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ |  | 24) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$                      |
| 7) $\sin(360^\circ - \alpha)$ |   |  |   |

5. Вычислите значения:

- |                                   |                                    |   |   |
|-----------------------------------|------------------------------------|---|---|
| 1) $\sin 120^\circ$               | 8) $\operatorname{ctg} 210^\circ$  | 15) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$  | 20) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$ |
| 2) $\cos 150^\circ$               | 9) $\sin 300^\circ$                | 16) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$ | 21) $\sin \frac{5\pi}{3}$               |
| 3) $\operatorname{tg} 135^\circ$  | 10) $\cos 315^\circ$               | 17) $\sin \frac{7\pi}{6}$               | 22) $\cos \frac{7\pi}{4}$               |
| 4) $\operatorname{ctg} 120^\circ$ | 11) $\operatorname{tg} 330^\circ$  | 18) $\cos \frac{5\pi}{4}$               | 23) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$ |
| 5) $\sin 210^\circ$               | 12) $\operatorname{ctg} 300^\circ$ | 19) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$  | 24) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$ |
| 6) $\cos 225^\circ$               | 13) $\sin \frac{2\pi}{3}$          |   |   |
| 7) $\operatorname{tg} 240^\circ$  | 14) $\cos \frac{3\pi}{4}$          |   |   |

6. Вычислите значения выражений:

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1) $\sin 150^\circ + \cos 120^\circ$                            | 6) $\operatorname{tg}^2 150^\circ - \operatorname{ctg}^2 150^\circ$           | 10) $\frac{\sin \frac{7\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{3}}$                            |
| 2) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ$ | 7) $\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}$                                  | 11) $\sin^2 \frac{5\pi}{4} + \cos^2 \frac{7\pi}{4}$                              |
| 3) $\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ$                        | 8) $\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{4\pi}{3}$                                | 12) $\operatorname{tg}^2 \frac{11\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2 \frac{11\pi}{6}$ |
| 4) $\frac{\sin 300^\circ}{\cos 330^\circ}$                      | 9) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$ |  |
| 5) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 120^\circ$                        |   |  |

7. В какой четверти находится угол  $\alpha$ , если:

- |                                       |  |   |
|---------------------------------------|--|---|
| 1) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$ | 3) $\sin \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha < 0$ | 5) $\cos \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha < 0$ |
| 2) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ | 4) $\sin \alpha < 0, \operatorname{tg} \alpha > 0$ | 6) $\cos \alpha < 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0$ |

7)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$

9)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$  (всегда ли?)

11)  $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha < 0$

8)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

10)  $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha > 0$

12)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha > 0$

# Основное тригонометрическое тождество

## Теория

В этой главе мы познакомимся с самым важным соотношением в тригонометрии — основным тригонометрическим тождеством. Оно связывает синус и косинус одного и того же угла.

**Основное тригонометрическое тождество:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

где  $\alpha$  — произвольный угол.

Это тождество выполняется для любого угла. Оно позволяет выразить синус через косинус и наоборот:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от того, в какой четверти находится угол  $\alpha$ .

**Важное замечание:** Если в задаче не указана четверть, то в ответе обычно оставляют знак  $\pm$  или рассматривают оба случая.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Нахождение синуса по известному косинусу*

Пусть известно, что  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  и угол  $\alpha$  находится в первой четверти. Найдём  $\sin \alpha$ .

По основному тождеству:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Так как угол в первой четверти, синус положителен. Поэтому:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

### Пример 2

*Нахождение косинуса по известному синусу*

Пусть  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  и угол  $\alpha$  находится во второй четверти. Найдём  $\cos \alpha$ .

По основному тождеству:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{25}{169} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

Во второй четверти косинус отрицателен. Поэтому:

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

## Пример 3

Когда четверть не указана

Пусть  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , а четверть не задана. Найдём  $\sin \alpha$ .

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

В ответе нужно указать оба возможных значения.

## Пример 4

Упрощение выражения с использованием основного тождества

Упростим выражение:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$$

Заметим, что это разность квадратов:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

Но  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , поэтому:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

## Пример 5

Ещё одно упрощение

Упростим:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)}$$

Но  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , поэтому числитель:

$$1 + 1 + 2 \cos \alpha = 2 + 2 \cos \alpha = 2(1 + \cos \alpha)$$

Получаем:

$$\frac{2(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

## Задачи

1. Найдите  $\sin \alpha$ , если:

1)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  в I

4)  $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  в I

7)  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  в IV

10)  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\alpha$  в II

2)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha$  в I

5)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  в IV

8)  $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  в IV

11)  $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  в III

3)  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  в I

6)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha$  в IV

9)  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  в II

12)  $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  в III

2. Найдите  $\cos \alpha$ , если:

1)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  в I

3)  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ ,  $\alpha$  в I

5)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  в II

7)  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ ,  $\alpha$  в II

2)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\alpha$  в I

4)  $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ ,  $\alpha$  в I

6)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\alpha$  в II

8)  $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ ,  $\alpha$  в II

9)  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  в III

10)  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ,  $\alpha$  в III

11)  $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ ,  $\alpha$  в IV

12)  $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$ ,  $\alpha$  в IV

3. Найдите  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  (четверть не указана):

1)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

4)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

7)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

10)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

2)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5)  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$

8)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11)  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

3)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

9)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

4. Упростите выражения:

1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

5)  $1 - \sin^2 \alpha$

9)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

2)  $2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$

6)  $1 - \cos^2 \alpha$

10)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

3)  $\sin^2 \alpha - 1$

7)  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$

11)  $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

4)  $\cos^2 \alpha - 1$

8)  $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

12)  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$

5. Докажите тождества:

1)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

7)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

2)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

8)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

3)  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

4)  $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$

9)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

5)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

10)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

6)  $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$

11)  $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

12)  $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

# СВЯЗЬ ТАНГЕНСА С КОСИНУСОМ И СИНОСОМ

## Теория

В этой главе мы рассмотрим важные соотношения, связывающие тангенс и котангенс с синусом и косинусом. Эти формулы часто используются при упрощении выражений и решении уравнений.

**Основные формулы:**

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

### Пример 1

*Нахождение косинуса по тангенсу*

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$  и угол  $\alpha$  находится в I четверти. Найдём  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ .

Используем формулу  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ :

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

В I четверти косинус положителен, поэтому  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ .

### Пример 2

*Упрощение выражения*

Упростим:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

Используем формулы:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha, \quad \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$$

Тогда:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

### Пример 3

*Ещё одно упрощение*

Упростим:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Выразим  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  через  $\cos^2 \alpha$ :  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ .

Тогда  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , а  $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) = 2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .

Получаем:

$$\frac{2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

Можно и проще:  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$

## Задачи

1. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ , если:

1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \alpha \text{ в I}$

4)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}, \alpha \text{ в I}$

7)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \alpha \text{ в III}$

10)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \alpha \text{ в I}$

2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \alpha \text{ в I}$

5)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \alpha \text{ в II}$

8)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}, \alpha \text{ в IV}$

11)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha \text{ в I}$

3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \alpha \text{ в I}$

6)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}, \alpha \text{ в II}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha = 1, \alpha \text{ в I}$

12)  $\operatorname{tg} \alpha = 0, \alpha \text{ в I}$

2. Найдите  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , если:

1)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}, \alpha \text{ в I}$

4)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{24}{7}, \alpha \text{ в I}$

7)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}, \alpha \text{ в III}$

10)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha \text{ в I}$

2)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}, \alpha \text{ в I}$

5)  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}, \alpha \text{ в II}$

8)  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}, \alpha \text{ в IV}$

3)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}, \alpha \text{ в I}$

6)  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}, \alpha \text{ в II}$

9)  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}, \alpha \text{ в I}$

3. Упростите выражения:

1)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha$

5)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

9)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

2)  $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \sin^2 \alpha$

6)  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

10)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

3)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha$

7)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

11)  $\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}$

4)  $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha$

8)  $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

12)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)$

4. Докажите тождества:

1)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

7)  $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

2)  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

8)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

3)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$

9)  $\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$

4)  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$

10)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = 1$

5)  $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$

11)  $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha) = 1$

6)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

12)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

# Практика по блоку 2

## Теория

В этом блоке мы изучили основные соотношения между тригонометрическими функциями одного угла:

- Основное тригонометрическое тождество:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- Определения тангенса и котангенса:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- Связь тангенса и котангенса:  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
- Формулы, связывающие тангенс с косинусом и синусом:  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ,  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Эти соотношения позволяют находить значения одних функций через другие, а также упрощать тригонометрические выражения.

В этой главе собраны задачи на все эти соотношения вперемешку. Ваша задача — определить, какие формулы нужно применить.

## Задачи

### 1. Упростите выражения:

- |                                    |  |   |
|------------------------------------|--|---|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ | 5) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$              | 9) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$  |
| 2) $1 - \sin^2 \alpha$             | 6) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | 10) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$                     |
| 3) $\cos^2 \alpha - 1$             | 7) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$                  | 11) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$                                       |
| 4) $1 - \cos^2 \alpha$             | 8) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha$                 | 12) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ |

### 2. Докажите тождества:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$     | 5) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$                                | 9) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$             |
| 2) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ | 6) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$                | 10) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$                                       |
| 3) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ | 7) $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$                | 11) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$  |
| 4) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$          | 8) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ | 12) $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ |

### 3. Вычислите значения выражений:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$                            | 6) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 60^\circ}$                           |
| 2) $\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ$ | 7) $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$                                     |
| 3) $1 + \operatorname{tg}^2 60^\circ$                             | 8) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ$          |
| 4) $1 + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$                            | 9) $(\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)^2 + (\sin 20^\circ - \cos 20^\circ)^2$ |
| 5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 45^\circ}$                   |  |

$$10) \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \cdot \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$11) \frac{1 - \sin^2 50^\circ}{1 - \cos^2 50^\circ}$$

$$12) \frac{1 - \cos^2 70^\circ}{\sin^2 70^\circ} - \frac{1 - \sin^2 70^\circ}{\cos^2 70^\circ}$$

# Синус суммы и разности

## Теория

В этой главе мы познакомимся с формулами сложения для синуса. Эти формулы позволяют выразить синус суммы или разности двух углов через синусы и косинусы этих углов.

**Формулы:**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

**Как запомнить:** "Синус суммы — синус на косинус плюс косинус на синус. Синус разности — синус на косинус минус косинус на синус"

**Важно:** Эти формулы работают для любых углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Вычисление синуса суммы двух известных углов*

Вычислим  $\sin 75^\circ$ , представив  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ .

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

### Пример 2

*Вычисление синуса разности*

Вычислим  $\sin 15^\circ$ , представив  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ .

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

### Пример 3

*Упрощение выражения*

Упростим  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ .

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

### Пример 4

*Доказательство тождества*

Докажем, что  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  с помощью формулы синуса разности.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin 90^\circ \cos \alpha - \cos 90^\circ \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$$

### Пример 5

*Решение уравнения*

Решим уравнение  $\sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

Левая часть — это  $\sin(x + 30^\circ)$ . Получаем:

$$\sin(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$x + 30^\circ = 30^\circ + 360^\circ k \quad \text{или} \quad x + 30^\circ = 150^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 360^\circ k \quad \text{или} \quad x = 120^\circ + 360^\circ k$$

## Пример 6

Общий алгоритм

При работе с формулами синуса суммы и разности:

1. Для вычисления значения синуса нестандартного угла представляем его как сумму или разность табличных углов.
2. Для упрощения выражений применяем формулы в прямом и обратном направлении.
3. Для решения уравнений сворачиваем выражение в синус суммы или разности.

## Задачи

1. Вычислите, используя формулы сложения:

- |  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| 1) $\sin 75^\circ$ (через $45^\circ + 30^\circ$ )  | 4) $\sin 165^\circ$ (через $120^\circ + 45^\circ$ или $180^\circ - 15^\circ$ ) | 7) $\sin 345^\circ$ (через $300^\circ + 45^\circ$ ) | 10) $\sin 195^\circ$ (через $225^\circ - 30^\circ$ ) |
| 2) $\sin 105^\circ$ (через $60^\circ + 45^\circ$ ) | 5) $\sin 195^\circ$ (через $150^\circ + 45^\circ$ )                            | 8) $\sin 105^\circ$ (через $135^\circ - 30^\circ$ ) | 11) $\sin 255^\circ$ (через $225^\circ + 30^\circ$ ) |
| 3) $\sin 15^\circ$ (через $45^\circ - 30^\circ$ )  | 6) $\sin 285^\circ$ (через $240^\circ + 45^\circ$ )                            | 9) $\sin 165^\circ$ (через $135^\circ + 30^\circ$ ) | 12) $\sin 345^\circ$ (через $315^\circ + 30^\circ$ ) |

2. Упростите выражения:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$         | 6) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \sin 2\alpha$   | 10) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ |
| 2) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$         | 7) $\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)$   |   |
| 3) $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$     | 8) $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha)$   | 11) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$  |
| 4) $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$     | 9) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin \alpha$ | 12) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$  |
| 5) $\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$ |  |   |

3. Докажите тождества:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$   | 6) $\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$                                  | 10) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$                             |
| 2) $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$   | 7) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$   | 11) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta$          |
| 3) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  | 8) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$   | 12) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha$ |
| 4) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | 9) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ |  |
| 5) $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ |   |  |

4. Решите уравнения:

$$1) \sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2) \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x = 1$$

$$4) \sin(45^\circ + x) \cos x - \cos(45^\circ + x) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5) \sin(60^\circ + x) = \sin(60^\circ - x)$$

$$6) \sin(30^\circ + x) = \cos(60^\circ - x)$$

$$7) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$8) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$9) \sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$10) \sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \sin x$$

$$11) \sin 7x \cos 4x + \cos 7x \sin 4x = 0$$

$$12) \sin 8x \cos 2x - \cos 8x \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### 5. Вычислите значение выражения (без калькулятора):

$$1) \sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$$

$$5) \sin 70^\circ \cos 25^\circ + \cos 70^\circ \sin 25^\circ$$

$$9) \sin 130^\circ \cos 70^\circ + \cos 130^\circ \sin 70^\circ$$

$$2) \sin 105^\circ \cos 45^\circ - \cos 105^\circ \sin 45^\circ$$

$$6) \sin 80^\circ \cos 35^\circ - \cos 80^\circ \sin 35^\circ$$

$$10) \sin 140^\circ \cos 50^\circ - \cos 140^\circ \sin 50^\circ$$

$$3) \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$$

$$7) \sin 100^\circ \cos 40^\circ + \cos 100^\circ \sin 40^\circ$$

$$11) \sin 160^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \sin 10^\circ$$

$$4) \sin 50^\circ \cos 10^\circ - \cos 50^\circ \sin 10^\circ$$

$$8) \sin 110^\circ \cos 20^\circ - \cos 110^\circ \sin 20^\circ$$

$$12) \sin 170^\circ \cos 5^\circ - \cos 170^\circ \sin 5^\circ$$

### 6. Задачи повышенной сложности:

1) Докажите, что  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$  (потребуется несколько преобразований)

4) Вычислите  $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$

9) Найдите все  $\alpha$ , для которых  $\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin(\alpha - 30^\circ)$

2) Докажите, что  $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$

5) Вычислите  $\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$

10) Найдите все  $\alpha$ , для которых  $\sin(\alpha + 45^\circ) = \cos(\alpha - 45^\circ)$

3) Вычислите  $\sin 18^\circ$  (используя  $\sin 36^\circ$  и формулы двойного угла)

6) Докажите, что  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

11) Упростите:  $\sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma$

7) Докажите, что  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$  (используя формулы сложения)

12) Упростите:  $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$  (выразите через синусы и косинусы  $\alpha, \beta, \gamma$ )

8) Докажите, что  $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha$

# Косинус суммы и разности

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулы сложения для косинуса. Эти формулы позволяют выразить косинус суммы или разности двух углов через синусы и косинусы этих углов.

**Формулы:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

**Как запомнить:** "Косинус суммы — косинус на косинус минус синус на синус. Косинус разности — косинус на косинус плюс синус на синус"

**Важно:** Эти формулы работают для любых углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Вычисление косинуса суммы двух известных углов*

Вычислим  $\cos 75^\circ$ , представив  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ .

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

### Пример 2

*Вычисление косинуса разности*

Вычислим  $\cos 15^\circ$ , представив  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ .

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

### Пример 3

*Упрощение выражения*

Упростим  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ .

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

### Пример 4

*Доказательство тождества*

Докажем, что  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  с помощью формулы косинуса разности.

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos 90^\circ \cos \alpha + \sin 90^\circ \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$

### Пример 5

*Связь с синусом*

Покажем, что  $\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin((90^\circ - \alpha) - \beta)$ . Это может быть полезно для преобразований.

## Пример 6

Решение уравнения

Решим уравнение  $\cos x \cos 30^\circ - \sin x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

Левая часть — это  $\cos(x + 30^\circ)$ . Получаем:

$$\cos(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$x + 30^\circ = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 30^\circ + 360^\circ k \quad \text{или} \quad x = -90^\circ + 360^\circ k$$

## Пример 7

Общий алгоритм

При работе с формулами косинуса суммы и разности:

1. Для вычисления значения косинуса нестандартного угла представляем его как сумму или разность табличных углов.
2. Для упрощения выражений применяем формулы в прямом и обратном направлении.
3. Для решения уравнений сворачиваем выражение в косинус суммы или разности.

## Задачи

1. Вычислите, используя формулы сложения:

- |  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| 1) $\cos 75^\circ$ (через $45^\circ + 30^\circ$ )  | 4) $\cos 165^\circ$ (через $120^\circ + 45^\circ$ или $180^\circ - 15^\circ$ ) | 7) $\cos 345^\circ$ (через $300^\circ + 45^\circ$ ) | 10) $\cos 195^\circ$ (через $225^\circ - 30^\circ$ ) |
| 2) $\cos 105^\circ$ (через $60^\circ + 45^\circ$ ) | 5) $\cos 195^\circ$ (через $150^\circ + 45^\circ$ )                            | 8) $\cos 105^\circ$ (через $135^\circ - 30^\circ$ ) | 11) $\cos 255^\circ$ (через $225^\circ + 30^\circ$ ) |
| 3) $\cos 15^\circ$ (через $45^\circ - 30^\circ$ )  | 6) $\cos 285^\circ$ (через $240^\circ + 45^\circ$ )                            | 9) $\cos 165^\circ$ (через $135^\circ + 30^\circ$ ) | 12) $\cos 345^\circ$ (через $315^\circ + 30^\circ$ ) |

2. Упростите выражения:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$         | 6) $\cos 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 2\alpha$   | 10) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ |
| 2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$         | 7) $\cos(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)$   |   |
| 3) $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$     | 8) $\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha)$   | 11) $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} - 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  |
| 4) $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$     | 9) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin \alpha$ | 12) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} - 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  |
| 5) $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$ |  |   |

3. Докажите тождества:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$   | 5) $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$                                | $-2 \sin \alpha \sin \beta$  |
| 2) $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$  | 6) $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$                                 | 9) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$  |
| 3) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ | 7) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ | 10) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$ |
| 4) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ | 8) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) =$                          |  |

$$11) \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha$$

$$12) \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha$$

#### 4. Решите уравнения:

$$1) \cos x \cos 30^\circ - \sin x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$5) \cos(60^\circ + x) = \cos(60^\circ - x)$$

$$9) \cos 2x \cos x = \cos x \cos 2x - \frac{1}{2}$$

(внимание!)

$$2) \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6) \cos(30^\circ + x) = \sin(60^\circ - x)$$

$$10) \cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x = \cos 2x$$

$$3) \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x = 1$$

$$7) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$11) \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x = 0$$

$$4) \cos(45^\circ + x) \cos x + \sin(45^\circ + x) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$8) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$12) \cos 8x \cos 2x + \sin 8x \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

#### 5. Вычислите значение выражения (без калькулятора):

$$1) \cos 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \sin 15^\circ$$

$$5) \cos 70^\circ \cos 25^\circ - \sin 70^\circ \sin 25^\circ$$

$$9) \cos 130^\circ \cos 70^\circ - \sin 130^\circ \sin 70^\circ$$

$$2) \cos 105^\circ \cos 45^\circ + \sin 105^\circ \sin 45^\circ$$

$$6) \cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$$

$$10) \cos 140^\circ \cos 50^\circ + \sin 140^\circ \sin 50^\circ$$

$$3) \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$$

$$7) \cos 100^\circ \cos 40^\circ - \sin 100^\circ \sin 40^\circ$$

$$11) \cos 160^\circ \cos 10^\circ - \sin 160^\circ \sin 10^\circ$$

$$4) \cos 50^\circ \cos 10^\circ + \sin 50^\circ \sin 10^\circ$$

$$8) \cos 110^\circ \cos 20^\circ + \sin 110^\circ \sin 20^\circ$$

$$12) \cos 170^\circ \cos 5^\circ + \sin 170^\circ \sin 5^\circ$$

#### 6. Задачи повышенной сложности:

$$1) \text{ Докажите, что } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

$$5) \text{ Вычислите } \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$$

$$9) \text{ Найдите все } \alpha, \text{ для которых } \cos(\alpha + 30^\circ) = \cos(\alpha - 30^\circ)$$

$$2) \text{ Докажите, что } \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$6) \text{ Докажите, что } \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$10) \text{ Найдите все } \alpha, \text{ для которых } \cos(\alpha + 45^\circ) = \sin(\alpha - 45^\circ)$$

$$3) \text{ Вычислите } \cos 18^\circ \text{ (используя } \cos 36^\circ \text{ и формулы двойного угла)}$$

$$7) \text{ Докажите, что } \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \text{ (используя формулы сложения)}$$

$$11) \text{ Упростите: } \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma$$

$$4) \text{ Вычислите } \cos 15^\circ + \cos 75^\circ$$

$$8) \text{ Докажите, что } \cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$12) \text{ Упростите: } \cos(\alpha + \beta + \gamma) \text{ (выразите через косинусы и синусы } \alpha, \beta, \gamma)$$

# Тангенс суммы и разности

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулы сложения для тангенса. Эти формулы позволяют выразить тангенс суммы или разности двух углов через тангенсы этих углов.

**Формулы:**

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}\end{aligned}$$

**Условия существования:** Формулы имеют смысл, когда определены все тангенсы, то есть  $\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ , и знаменатели не равны нулю.

**Для котангенса аналогично:**

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}\end{aligned}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Вычисление тангенса суммы*

Вычислим  $\operatorname{tg} 75^\circ$ , представив  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ .

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

Домножим числитель и знаменатель на  $\sqrt{3} + 1$ :

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

### Пример 2

*Вычисление тангенса разности*

Вычислим  $\operatorname{tg} 15^\circ$ , представив  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ .

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Домножим числитель и знаменатель на  $\sqrt{3} - 1$ :

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

### Пример 3

*Упрощение выражения*

Упростим  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ .

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}$$

Дальнейшее упрощение зависит от конкретной задачи.

## Пример 4

*Доказательство тождества*

Докажем, что  $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$ .

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

## Пример 5

*Решение уравнения*

Решим уравнение  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$  при условии, что все тангенсы определены.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin(x + 2x)}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0$$

Отсюда  $\sin 3x = 0$ , то есть  $3x = \pi k$ ,  $x = \frac{\pi k}{3}$ . Нужно исключить значения, при которых знаменатель обращается в ноль ( $\cos x = 0$  или  $\cos 2x = 0$ ). Это  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  и  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ . Проверяем, какие из  $x = \frac{\pi k}{3}$  попадают в эти множества.

## Пример 6

*Общий алгоритм*

При работе с формулами тангенса суммы и разности:

1. Для вычисления значения тангенса нестандартного угла представляем его как сумму или разность углов с известными тангенсами.
2. При упрощении выражений часто полезно привести к общему знаменателю или использовать связь с синусом и косинусом.
3. При решении уравнений сворачиваем сумму или разность тангенсов в дробь с синусом суммы в числителе.

## Задачи

1. Вычислите, используя формулы сложения:

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} 75^\circ$ (через $45^\circ + 30^\circ$ )  | 45° или $180^\circ - 15^\circ$ )                                 | 7) $\operatorname{tg} 345^\circ$ (через $300^\circ + 45^\circ$ ) | 10) $\operatorname{tg} 195^\circ$ (через $225^\circ - 30^\circ$ ) |
| 2) $\operatorname{tg} 105^\circ$ (через $60^\circ + 45^\circ$ ) | 5) $\operatorname{tg} 195^\circ$ (через $150^\circ + 45^\circ$ ) | 8) $\operatorname{tg} 105^\circ$ (через $135^\circ - 30^\circ$ ) | 11) $\operatorname{tg} 255^\circ$ (через $225^\circ + 30^\circ$ ) |
| 3) $\operatorname{tg} 15^\circ$ (через $45^\circ - 30^\circ$ )  | 6) $\operatorname{tg} 285^\circ$ (через $240^\circ + 45^\circ$ ) | 9) $\operatorname{tg} 165^\circ$ (через $135^\circ + 30^\circ$ ) | 12) $\operatorname{tg} 345^\circ$ (через $315^\circ + 30^\circ$ ) |
| 4) $\operatorname{tg} 165^\circ$ (через $120^\circ +$           |  |  |   |

2. Упростите выражения:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$   | 4) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ | 7) $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)$   |
| 2) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$   | 5) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$  | 8) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}$ |
| 3) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ | 6) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$  |  |

$$9) \frac{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$11) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$12) \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

$$10) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

### 3. Докажите тождества:

$$1) \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$5) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$9) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$2) \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

$$6) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ (частный случай суммы при } \beta = \alpha)$$

$$10) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$3) \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$7) \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$11) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$4) \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{2 \operatorname{tg} \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$8) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1$$

$$12) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

### 4. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$6) \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 1$$

$$9) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2) \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$7) \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = \sqrt{3}$$

$$10) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$$

$$3) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$$

$$8) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$11) \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$$

$$4) \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1$$

$$12) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0 \text{ (для продвинутых)}$$

$$5) \operatorname{tg}(45^\circ + x) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - x) = 1$$

### 5. Вычислите значение выражения (без калькулятора):

$$1) \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$5) \frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$$

$$8) \operatorname{tg} 67.5^\circ$$

$$2) \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$6) \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$$

$$9) \operatorname{tg} 7.5^\circ$$

$$3) \operatorname{tg} 105^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ$$

$$7) \operatorname{tg} 22.5^\circ \text{ (используя } \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \text{ и формулу половинного угла)}$$

$$10) \operatorname{tg} 82.5^\circ$$

$$4) \operatorname{tg} 105^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$$

$$11) \operatorname{tg} 36^\circ \text{ (если известно } \operatorname{tg} 18^\circ)$$

$$12) \operatorname{tg} 54^\circ$$

### 6. Задачи повышенной сложности:

$$1) \text{ Докажите, что } \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5) \text{ Докажите, что } \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$$

$$9) \text{ Вычислите } \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

$$2) \text{ Докажите, что } \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$6) \text{ Найдите все } \alpha, \text{ для которых } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$$

$$10) \text{ Решите уравнение: } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x = \frac{\pi}{4}$$

$$3) \text{ Вычислите } \operatorname{tg} 18^\circ \text{ (используя } \operatorname{tg} 36^\circ \text{ и формулы двойного угла)}$$

$$7) \text{ Докажите, что если } \alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

$$11) \text{ Решите уравнение: } \operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg}(x-1) = \operatorname{arctg} \frac{8}{31}$$

$$4) \text{ Докажите, что } \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$8) \text{ Докажите, что } \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$$

$$12) \text{ Докажите, что } \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$$

# Практика по блоку 3

## Теория

В этом блоке мы изучили формулы сложения для тригонометрических функций:

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

Эти формулы позволяют:

- Вычислять значения тригонометрических функций для нестандартных углов;
- Упрощать тригонометрические выражения;
- Доказывать тождества;
- Решать уравнения.

В этой главе собраны задачи на все типы формул сложения вперемешку. Ваша задача — определить, какую формулу нужно применить.

## Задачи

1. Вычислите значения выражений:

- |                                 |                                 |                                  |                                   |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sin 75^\circ$              | 4) $\sin 15^\circ$              | 7) $\sin 105^\circ$              | 10) $\sin 165^\circ$              |
| 2) $\cos 75^\circ$              | 5) $\cos 15^\circ$              | 8) $\cos 105^\circ$              | 11) $\cos 165^\circ$              |
| 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$ | 6) $\operatorname{tg} 15^\circ$ | 9) $\operatorname{tg} 105^\circ$ | 12) $\operatorname{tg} 165^\circ$ |

2. Упростите выражения:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$                       | 5) $\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$  | 9) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ - \alpha)}$  |
| 2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$                       | 6) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$ | 10) $\frac{\cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha)}$   |
| 3) $\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$ | 7) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$  | 11) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$   |
| 4) $\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta$ | 8) $\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha)$  | 12) $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$ |

3. Докажите тождества:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$            | 5) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$   | 9) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$    |
| 2) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$            | 6) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$   | 10) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$   |
| 3) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$ | 7) $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ | 11) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ |
| 4) $\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$ | 8) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ | 12) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$ |

#### 4. Решите уравнения:

1)  $\sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

2)  $\cos x \cos 60^\circ - \sin x \sin 60^\circ = 0$

3)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$

4)  $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5)  $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = \frac{1}{2}$

6)  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 1$

7)  $\sin(x + 30^\circ) = \cos(x - 30^\circ)$

8)  $\cos(x + 45^\circ) = \sin(x - 45^\circ)$

9)  $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \operatorname{ctg}(x - 45^\circ)$

10)  $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \sin 2x$

11)  $\cos 7x \cos 4x + \sin 7x \sin 4x = \cos 3x$

12)  $\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x = 0$

#### 5. Вычислите значения выражений (без калькулятора):

1)  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

2)  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

3)  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \sin 15^\circ$

4)  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$

5)  $\frac{\operatorname{tg} 75^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 15^\circ}$

6)  $\frac{\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ}{1 + \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 15^\circ}$

7)  $\sin 105^\circ \cos 75^\circ + \cos 105^\circ \sin 75^\circ$

8)  $\sin 105^\circ \cos 75^\circ - \cos 105^\circ \sin 75^\circ$

9)  $\cos 105^\circ \cos 75^\circ - \sin 105^\circ \sin 75^\circ$

10)  $\cos 105^\circ \cos 75^\circ + \sin 105^\circ \sin 75^\circ$

11)  $\frac{\operatorname{tg} 105^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg} 105^\circ \operatorname{tg} 75^\circ}$

12)  $\frac{\operatorname{tg} 105^\circ - \operatorname{tg} 75^\circ}{1 + \operatorname{tg} 105^\circ \operatorname{tg} 75^\circ}$

#### 6. Задачи повышенной сложности:

1) Докажите, что  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

2) Докажите, что  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

3) Докажите, что  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$

4) Вычислите  $\sin 18^\circ$  (используя  $\sin 36^\circ$  и формулы двойного угла)

5) Вычислите  $\cos 36^\circ$

6) Докажите, что  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} +$

7) Докажите, что  $\operatorname{arcsin} \frac{3}{5} + \operatorname{arcsin} \frac{8}{17} = \operatorname{arcsin} \frac{77}{85}$

8) Решите уравнение:  $\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}$

9) Решите уравнение:  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  (для  $x > 0$ )

10) Докажите, что  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) \sin(\gamma - \alpha) = 0$

11) Докажите, что если  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , то  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$

12) Докажите, что если  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , то  $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 1$

# Синус двойного угла

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулы для синуса двойного угла. Эти формулы являются частным случаем формул сложения, когда  $\beta = \alpha$ .

**Основная формула:**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

**Как получить:** Из формулы синуса суммы:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

**Другие формы записи:** Иногда полезно выражать  $\sin 2\alpha$  через тангенс:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Вычисление синуса двойного угла по известному синусу*

Пусть  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и угол  $\alpha$  находится в I четверти. Найдём  $\sin 2\alpha$ .

Сначала найдём  $\cos \alpha$ . В I четверти косинус положителен:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Теперь:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

### Пример 2

*Вычисление синуса двойного угла по известному тангенсу*

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$  и угол  $\alpha$  в I четверти. Найдём  $\sin 2\alpha$ .

Используем формулу  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ :

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{25} = \frac{24}{25}$$

### Пример 3

*Упрощение выражения*

Упростим  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ .

$$\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \cos \alpha$$

(при  $\sin \alpha \neq 0$ )

## Пример 4

Доказательство тождества

Докажем, что  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Используем  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  и  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ :

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

## Пример 5

Решение уравнения

Решим уравнение  $\sin 2x = \sin x$ .

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos x - 1 = 0$$

Из первого:  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Из второго:  $\cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \pi k, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ .

## Пример 6

Общий алгоритм

При работе с формулами синуса двойного угла:

1. Для вычисления  $\sin 2\alpha$  нужно знать  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  или  $\operatorname{tg} \alpha$ .
2. Формула часто используется для упрощения выражений и доказательства тождеств.
3. При решении уравнений помогает разложить на множители или свести к простейшим уравнениям.

## Задачи

1. Найдите  $\sin 2\alpha$ , если:

1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \text{ в I}$

4)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \alpha \text{ в I}$

7)  $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \alpha \text{ в II}$

10)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \alpha \text{ в I}$

2)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \alpha \text{ в I}$

5)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \text{ в II}$

8)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \alpha \text{ в II}$

11)  $\cos \alpha = \frac{15}{17}, \alpha \text{ в I}$

3)  $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \alpha \text{ в I}$

6)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \alpha \text{ в II}$

9)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \text{ в I}$

12)  $\cos \alpha = \frac{24}{25}, \alpha \text{ в I}$

2. Найдите  $\sin 2\alpha$ , используя формулу через тангенс:

1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \alpha \text{ в I}$

4)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}, \alpha \text{ в I}$

7)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha \text{ в I}$

10)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \alpha \text{ в I}$

2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \alpha \text{ в I}$

5)  $\operatorname{tg} \alpha = 1, \alpha \text{ в I}$

8)  $\operatorname{tg} \alpha = 2, \alpha \text{ в I}$

11)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \text{ в I}$

3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \alpha \text{ в I}$

6)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \alpha \text{ в I}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha = 3, \alpha \text{ в I}$

12)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, \alpha \text{ в I}$

3. Упростите выражения:

1)  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha}$

2)  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$

3)  $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha$

4)  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha$

5)  $\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$

6)  $\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$

7)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

8)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

9)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

10)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

11)  $\sin 2\alpha \cos 2\alpha$

12)  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha$

## 4. Докажите тождества:

1)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2)  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

3)  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \cos \alpha \quad (\sin \alpha \neq 0)$

4)  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \sin \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0)$

5)  $\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 2 \cos^2 \alpha$

6)  $\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin^2 \alpha$

7)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

8)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

9)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

10)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

11)  $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$

12)  $\sin 2\alpha = 1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

## 5. Решите уравнения:

1)  $\sin 2x = \sin x$

2)  $\sin 2x = \cos x$

3)  $\sin 2x = \frac{1}{2}$

4)  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5)  $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6)  $\sin 2x = 0$

7)  $\sin 2x = 2 \sin x$

8)  $\sin 2x + \sin x = 0$

9)  $\sin 2x - \cos x = 0$

10)  $\sin 2x + \cos 2x = 1$

11)  $\sin 2x + \cos x = 0$

12)  $\sin 2x = \operatorname{tg} x$

## 6. Задачи повышенной сложности:

1) Вычислите  $\sin 36^\circ$ , используя  $\sin 72^\circ$  и формулы двойного угла

$\sin 4x + \sin 6x = 0$

$\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

2) Вычислите  $\sin 18^\circ$ 6) Решите уравнение:  
 $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$ 10) Выразите  $\sin 2\alpha$  через  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  тремя разными способами3) Докажите, что  $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$ 7) Найдите наибольшее значение выражения  $\sin 2x - \sin x$ 11) Докажите, что  $\sin 2\alpha \sin 2\beta + \sin 2\beta \sin 2\gamma + \sin 2\gamma \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ 4) Докажите, что  $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$ 8) Найдите наименьшее значение выражения  $\sin 2x + \cos 2x$ 12) При каких значениях  $x$  выражение  $\sin 2x - 2 \sin x$  принимает наибольшее значение?5) Решите уравнение:  $\sin 2x +$  9) Докажите, что  $\sin 2\alpha =$

# Косинус двойного угла

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулы для косинуса двойного угла. Эти формулы являются частным случаем формул сложения, когда  $\beta = \alpha$ .

**Основные формулы:**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

**Как получить:** Из формулы косинуса суммы:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Используя основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , можно получить две другие формы:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

**Через тангенс:**

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*По известному синусу*

Пусть  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и угол  $\alpha$  находится в I четверти. Найдём  $\cos 2\alpha$ .

Используем формулу  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ :

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

### Пример 2

*По известному косинусу*

Пусть  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  и угол  $\alpha$  в I четверти. Найдём  $\cos 2\alpha$ .

Используем формулу  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ :

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

### Пример 3

*По известному тангенсу*

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ . Найдём  $\cos 2\alpha$ .

Используем формулу  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ :

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$

## Пример 4

Упрощение выражения

Упростим  $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ .

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha$$

(при  $\cos \alpha \neq \sin \alpha$ )

## Пример 5

Доказательство тождества

Докажем, что  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

Используем формулы  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$  и  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ :

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \alpha)}{1 + (2\cos^2 \alpha - 1)} = \frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

## Задачи

1. Найдите  $\cos 2\alpha$ , используя формулу  $1 - 2\sin^2 \alpha$ :

1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  в I

4)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  в I

7)  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  в II

10)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\alpha$  в I

2)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha$  в I

5)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  в II

8)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  в II

11)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\alpha$  в I

3)  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  в I

6)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha$  в II

9)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha$  в I

12)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha$  в I

2. Найдите  $\cos 2\alpha$ , используя формулу  $2\cos^2 \alpha - 1$ :

1)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  в I

4)  $\cos \alpha = \frac{24}{25}$ ,  $\alpha$  в I

7)  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  в I

10)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\alpha$  в I

2)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\alpha$  в I

5)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  в I

8)  $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  в I

11)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\alpha$  в I

3)  $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ ,  $\alpha$  в I

6)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha$  в I

9)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha$  в I

12)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\alpha$  в I

3. Найдите  $\cos 2\alpha$ , используя формулу через тангенс:

1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

4)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$

7)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

5)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$

8)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$

11)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$

6)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha = 3$

12)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

4. Упростите выражения:

1)  $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

4)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

7)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$

2)  $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

5)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

8)  $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2\sin \alpha \cos \alpha$

3)  $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$

6)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

9)  $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos^2 \alpha}$

10)  $\frac{\cos 2\alpha - 1}{2\sin^2 \alpha}$

$$11) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$12) \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

5. Докажите тождества:

$$1) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$2) \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$3) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$4) \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$5) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$$

$$6) \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$$

$$7) \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$8) \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1$$

$$9) \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$10) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$11) (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

$$12) (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

# Тангенс двойного угла

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулу для тангенса двойного угла. Это частный случай формулы тангенса суммы, когда  $\beta = \alpha$ .

**Основная формула:**

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**Как получить:** Из формулы тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**Условия существования:** Формула имеет смысл, когда определены все тангенсы, то есть:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$$

Последнее условие означает  $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ .

**Для котангенса:**

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*По известному тангенсу*

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ . Найдём  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

### Пример 2

*По известному синусу и косинусу*

Пусть  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ . Найдём  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

Сначала найдём  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ . Затем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Можно также использовать формулу  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24/25}{7/25} = \frac{24}{7}$$

### Пример 3

Упрощение выражения

Упростим  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ .

Это произведение равно 1 (при условии, что знаменатели не равны нулю).

### Пример 4

Доказательство тождества

Докажем, что  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ .

Преобразуем правую часть:

$$\frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

### Пример 5

Решение уравнения

Решим уравнение  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$ .

ОДЗ:  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $\operatorname{tg} x \neq \pm 1$ .

Из равенства тангенсов следует, что аргументы отличаются на  $\pi k$ :

$$2x = x + \pi k$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Проверим ОДЗ: при  $x = \pi k$  тангенс определён и не равен  $\pm 1$  (кроме  $k = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$ , но это не целые числа).

Ответ:  $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ .

## Задачи

1. Найдите  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если:

1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

4)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$

7)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

5)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$

8)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$

11)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$

6)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha = 3$

12)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

2. Найдите  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , используя  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ :

1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$

4)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \cos \alpha = \frac{24}{25}$

7)  $\sin \alpha = \frac{15}{17}, \cos \alpha = \frac{8}{17}$

10)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}$

5)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$

8)  $\sin \alpha = \frac{24}{25}, \cos \alpha = \frac{7}{25}$

11)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}$

3)  $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17}$

6)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}$

9)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. Упростите выражения:

1)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

2)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$

3)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

4)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}$

5)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}$

6)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

7)  $\frac{1}{\operatorname{ctg} 2\alpha}$

8)  $\frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$

9)  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

10)  $\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$

11)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$

12)  $\left(\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}\right)^2 - \operatorname{tg} 2\alpha$

## 4. Докажите тождества:

1)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

2)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$

3)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

4)  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$

5)  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

6)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

7)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

8)  $\frac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$

9)  $\frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

10)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

11)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

12)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1$

## 5. Решите уравнения:

1)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

2)  $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x$

3)  $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

4)  $\operatorname{tg} 2x = 1$

5)  $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

6)  $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

7)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

8)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$

9)  $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$

10)  $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$

11)  $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$

12)  $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$

## 6. Задачи повышенной сложности:

1) Вычислите  $\operatorname{tg} 22.5^\circ$ , используя  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$  и формулу половинного угла2) Вычислите  $\operatorname{tg} 15^\circ$ , используя  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 3) Вычислите  $\operatorname{tg} 75^\circ$ , используя  $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4) Докажите, что  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$ 5) Докажите, что  $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 6) Решите уравнение:  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$ 7) Решите уравнение:  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$ 8) Найдите все значения  $x$ , при которых  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$  и  $\sin x \neq 0$ 9) Докажите, что  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ 10) Докажите, что  $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$ 11) При каких значениях  $x$  выражение  $\operatorname{tg} 2x$  не определено?12) Найдите область определения функции  $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x$

# Формулы половинного угла

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулу для тангенса двойного угла. Это частный случай формулы тангенса суммы, когда  $\beta = \alpha$ .

**Основная формула:**

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**Как получить:** Из формулы тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**Условия существования:** Формула имеет смысл, когда определены все тангенсы, то есть:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$$

Последнее условие означает  $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ .

**Для котангенса:**

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*По известному тангенсу*

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ . Найдём  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

### Пример 2

*По известному синусу и косинусу*

Пусть  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ . Найдём  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

Сначала найдём  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ . Затем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Можно также использовать формулу  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24/25}{7/25} = \frac{24}{7}$$

### Пример 3

Упрощение выражения

Упростим  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ .

Это произведение равно 1 (при условии, что знаменатели не равны нулю).

### Пример 4

Доказательство тождества

Докажем, что  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ .

Преобразуем правую часть:

$$\frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

### Пример 5

Решение уравнения

Решим уравнение  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$ .

ОДЗ:  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $\operatorname{tg} x \neq \pm 1$ .

Из равенства тангенсов следует, что аргументы отличаются на  $\pi k$ :

$$2x = x + \pi k$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Проверим ОДЗ: при  $x = \pi k$  тангенс определён и не равен  $\pm 1$  (кроме  $k = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$ , но это не целые числа).

Ответ:  $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ .

## Задачи

1. Найдите  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если:

1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

4)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$

7)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

5)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$

8)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$

11)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$

6)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha = 3$

12)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

2. Найдите  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , используя  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ :

1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$

4)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \cos \alpha = \frac{24}{25}$

7)  $\sin \alpha = \frac{15}{17}, \cos \alpha = \frac{8}{17}$

10)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}$

5)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$

8)  $\sin \alpha = \frac{24}{25}, \cos \alpha = \frac{7}{25}$

11)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}$

3)  $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17}$

6)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}$

9)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. Упростите выражения:

1)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

2)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$

3)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

4)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}$

5)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}$

6)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

7)  $\frac{1}{\operatorname{ctg} 2\alpha}$

8)  $\frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$

9)  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

10)  $\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$

11)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$

12)  $\left(\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}\right)^2 - \operatorname{tg} 2\alpha$

## 4. Докажите тождества:

1)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

2)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$

3)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

4)  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$

5)  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

6)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

7)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

8)  $\frac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$

9)  $\frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

10)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

11)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

12)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1$

## 5. Решите уравнения:

1)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

2)  $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x$

3)  $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

4)  $\operatorname{tg} 2x = 1$

5)  $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

6)  $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

7)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

8)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$

9)  $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$

10)  $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$

11)  $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$

12)  $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$

## 6. Задачи повышенной сложности:

1) Вычислите  $\operatorname{tg} 22.5^\circ$ , используя  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$  и формулу половинного угла2) Вычислите  $\operatorname{tg} 15^\circ$ , используя  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 3) Вычислите  $\operatorname{tg} 75^\circ$ , используя  $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4) Докажите, что  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$ 5) Докажите, что  $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 6) Решите уравнение:  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$ 7) Решите уравнение:  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$ 8) Найдите все значения  $x$ , при которых  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$  и  $\sin x \neq 0$ 9) Докажите, что  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ 10) Докажите, что  $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$ 11) При каких значениях  $x$  выражение  $\operatorname{tg} 2x$  не определено?12) Найдите область определения функции  $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x$

# Практика по блоку 4

## Теория

В этом блоке мы изучили формулы двойного и половинного угла:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
- $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$
- $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$
- $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

Эти формулы позволяют:

- Выражать функции двойного угла через функции исходного угла;
- Понижать степень в выражениях;
- Вычислять значения функций для половинных углов;
- Упрощать тригонометрические выражения;
- Решать тригонометрические уравнения.

В этой главе собраны задачи на все формулы этого блока вперемешку. Ваша задача — определить, какую формулу нужно применить.

## Задачи

1. Вычислите значения выражений:

- |   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 1) $\sin 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,<br>$\alpha$ в I          | 4) $\sin 2\alpha$ , если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$                    | 7) $\sin 15^\circ$ через $\cos 30^\circ$                           | $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$   |
| 2) $\cos 2\alpha$ , если $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,<br>$\alpha$ в I          | 5) $\cos 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,<br>$\alpha$ в II              | 8) $\cos 22.5^\circ$ через $\cos 45^\circ$                         | 11) $\cos 36^\circ$ , используя<br>$\sin 18^\circ$                                 |
| 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ | 6) $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ,<br>$\alpha$ в I | 9) $\operatorname{tg} 15^\circ$ через $\operatorname{tg} 30^\circ$ | 12) $\operatorname{tg} 22.5^\circ$ , используя<br>$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ |
| 10) $\sin 18^\circ$ , используя   |  |  |  |

2. Упростите выражения:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1) $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ | 5) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ | 9) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ |
| 2) $\frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha}$ | 6) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ | 10) $\frac{1 + \cos 4\alpha}{2}$               |
| 3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$         | 7) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ | 11) $\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}$               |
| 4) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$         | 8) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ | 12) $\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}$        |

3. Докажите тождества:

1)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

6)  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$

10)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

2)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

7)  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

11)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

3)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

8)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

12)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

4)  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

9)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

5)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

## 4. Решите уравнения:

1)  $\sin 2x = \sin x$

6)  $\sin 2x + \sin x = 0$

10)  $\sin x = \cos \frac{x}{2}$

2)  $\cos 2x = \cos x$

7)  $\cos 2x - \cos x = 0$

11)  $\cos x = \sin \frac{x}{2}$

3)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

8)  $\sin 2x = 2 \sin x$

12)  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

4)  $\sin 2x = \cos x$

9)  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  (тождество, но где здесь уравнение?)

5)  $\cos 2x = \sin x$

## 5. Вычислите значения выражений (без калькулятора):

1)  $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

5)  $\frac{1 + \cos 60^\circ}{2}$

9)  $\frac{2 \operatorname{tg} 22.5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 22.5^\circ}$

2)  $\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ$

6)  $\frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

10)  $\sin 18^\circ \cos 18^\circ$

3)  $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$

7)  $\sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$

11)  $\cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ$

4)  $\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}$

8)  $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ$

12)  $\frac{2 \operatorname{tg} 18^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ}$

## 6. Задачи повышенной сложности:

1) Докажите, что  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

5) Докажите, что  $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$

9) Решите уравнение:  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

2) Докажите, что  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

6) Решите уравнение:  $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

10) Найдите все значения  $x$ , при которых  $\sin 2x = 2 \sin x$  и  $\cos x \neq 0$

3) Докажите, что  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$

7) Решите уравнение:  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

11) Найдите все значения  $x$ , при которых  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  (тождество, но есть ли исключения?)

4) Вычислите  $\sin 18^\circ$  и  $\cos 36^\circ$

8) Решите уравнение:  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

12) При каких значениях  $x$  выражение  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$  не определено?

# Сумма синусов и косинусов в произведение

## Теория

В этой главе мы рассмотрим формулы, которые позволяют преобразовывать сумму или разность синусов и косинусов в произведение. Эти формулы очень полезны при решении уравнений и упрощении выражений.

**Формулы:**

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

**Как запомнить:** - Для синуса: сумма — два синус полусуммы на косинус полуразности - Для синуса: разность — два синус полуразности на косинус полусуммы - Для косинуса: сумма — два косинус полусуммы на косинус полуразности - Для косинуса: разность — минус два синус полусуммы на синус полуразности  
Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Преобразование суммы синусов*

Преобразуем в произведение  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ .

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

### Пример 2

*Преобразование разности косинусов*

Преобразуем в произведение  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$ .

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### Пример 3

*Упрощение выражения*

Упростим  $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$ .

Применяем формулы:

$$\sin 5x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x + 3x}{2} \cos \frac{5x - 3x}{2} = 2 \sin 4x \cos x$$

$$\cos 5x + \cos 3x = 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \cos \frac{5x - 3x}{2} = 2 \cos 4x \cos x$$

Тогда:

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \sin 4x \cos x}{2 \cos 4x \cos x} = \operatorname{tg} 4x$$

(при  $\cos x \neq 0$  и  $\cos 4x \neq 0$ )

## Пример 4

Решение уравнения

Решим уравнение  $\sin 5x + \sin 3x = 0$ .

Применяем формулу:

$$2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2} = 2 \sin 4x \cos x = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin 4x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0$$

Из первого:  $4x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Из второго:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi k}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ .

## Пример 5

Доказательство тождества

Докажем, что  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

## Пример 6

Общий алгоритм

При работе с формулами преобразования суммы в произведение:

1. Определяем, какая формула нужна (сумма или разность синусов/косинусов).
2. Находим полусумму и полуразность аргументов.
3. Применяем формулу.
4. При решении уравнений полученное произведение приравниваем к нулю.

## Задачи

1. Преобразуйте в произведение:

- |                                     |                                     |                                    |
|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$  | 5) $\sin 80^\circ - \sin 20^\circ$  | 9) $\cos 80^\circ - \cos 20^\circ$ |
| 2) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$ | 6) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$  | 10) $\sin 3x + \sin x$             |
| 3) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ$  | 7) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$ | 11) $\sin 5x - \sin 3x$            |
| 4) $\sin 70^\circ - \sin 10^\circ$  | 8) $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ$  | 12) $\cos 4x + \cos 2x$            |

2. Упростите выражения:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$ | 5) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$                           | 9) $\frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$ |
| 2) $\frac{\sin 7x - \sin 3x}{\cos 7x + \cos 3x}$ | 6) $\frac{\sin 2x - \sin 4x}{\cos 2x - \cos 4x}$                         | 10) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$          |
| 3) $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 4x - \sin 2x}$ | 7) $\frac{\sin 45^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 45^\circ + \cos 15^\circ}$ | 11) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$          |
| 4) $\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos 5x - \cos 3x}$ | 8) $\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}$ | 12) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$          |

3. Докажите тождества:

- 1)  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
- 2)  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$
- 3)  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
- 4)  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$
- 5)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$
- 6)  $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2}$
- 7)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$
- 8)  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$
- 9)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2}$
- 10)  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2}$
- 11)  $\sin 2x + \sin 2y = 2 \sin(x+y) \cos(x-y)$
- 12)  $\cos 2x - \cos 2y = -2 \sin(x+y) \sin(x-y)$

#### 4. Решите уравнения:

- 1)  $\sin 5x + \sin 3x = 0$
- 2)  $\sin 7x - \sin 3x = 0$
- 3)  $\cos 5x + \cos 3x = 0$
- 4)  $\cos 7x - \cos 3x = 0$
- 5)  $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$
- 6)  $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$
- 7)  $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$
- 8)  $\cos 2x + \cos 4x = \cos 3x$
- 9)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
- 10)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
- 11)  $\sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$
- 12)  $\sin x - \sin 3x = \cos x - \cos 3x$

#### 5. Вычислите значения выражений (без калькулятора):

- 1)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$
- 2)  $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$
- 3)  $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$
- 4)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$
- 5)  $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$
- 6)  $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$
- 7)  $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$
- 8)  $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$
- 9)  $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$
- 10)  $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$
- 11)  $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$
- 12)  $\frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$

#### 6. Задачи повышенной сложности:

- 1) Докажите, что  $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$
- 2) Докажите, что  $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$
- 3) Докажите, что  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) Решите уравнение:  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
- 5) Решите уравнение:  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$
- 6) Решите уравнение:  $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$
- 7) Докажите, что  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2 - \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x$
- 8) Докажите, что  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$
- 9) Найдите сумму  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$
- 10) Найдите сумму  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$
- 11) Докажите, что  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$
- 12) Докажите, что  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4 \cos 4x \cos 2x \cos x$

# Произведение синусов и косинусов в сумму

## Теория

В этой главе мы рассмотрим обратные формулы — преобразование произведения тригонометрических функций в сумму или разность. Эти формулы часто используются при интегрировании и решении уравнений.

**Формулы:**

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

**Как запомнить:** - Произведение синусов — полусумма косинуса разности и минус косинуса суммы  
- Произведение косинусов — полусумма косинуса разности и косинуса суммы  
- Произведение синуса на косинус — полусумма синуса разности и синуса суммы

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Преобразование произведения синусов*

Преобразуем в сумму  $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$ .

$$\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} [\cos 60^\circ - \cos 90^\circ] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{1}{4}$$

### Пример 2

*Преобразование произведения косинусов*

Преобразуем в сумму  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$ .

$$\cos 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos(75^\circ - 15^\circ) + \cos(75^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} [\cos 60^\circ + \cos 90^\circ] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + 0 \right] = \frac{1}{4}$$

### Пример 3

*Преобразование произведения синуса на косинус*

Преобразуем в сумму  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ .

$$\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} [\sin(75^\circ - 15^\circ) + \sin(75^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} [\sin 60^\circ + \sin 90^\circ] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right] = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

### Пример 4

*Упрощение выражения*

Упростим  $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x$ .

$$\begin{aligned} \text{Первое слагаемое: } \sin 5x \cos 3x &= \frac{1}{2} [\sin(5x - 3x) + \sin(5x + 3x)] = \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 8x] \\ \text{Второе слагаемое: } \cos 5x \sin 3x &= \frac{1}{2} [\sin(5x - 3x) + \sin(5x + 3x)] = \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 8x] \end{aligned}$$

$$\text{Сумма: } \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 8x] + \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 8x] = \sin 2x + \sin 8x$$

Но это можно было получить и по формуле синуса суммы:  $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = \sin(5x+3x) = \sin 8x$  — значит, мы где-то ошиблись? Проверим:  $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = \sin(5x + 3x) = \sin 8x$ . А по нашим преобразованиям получилось  $\sin 2x + \sin 8x$ . Значит, первое и второе слагаемые равны, но их сумма не удваивается? Давайте аккуратно:

$$\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 8x] \quad \cos 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 8x]$$

$$\text{Сумма: } \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 8x] + \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 8x] = \sin 2x + \sin 8x$$

Но по формуле сложения должно быть  $\sin 8x$ . Значит,  $\sin 2x$  должен сократиться? Этого не происходит. В чём дело? Оказывается,  $\cos 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\sin(5x - 3x) + \sin(5x + 3x)]$  — это верно, но  $\sin(5x - 3x) = \sin 2x$ . Всё правильно. Тогда получается противоречие. Значит, наше предположение неверно. На самом деле  $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = \sin 8x$ , и это должно равняться  $\sin 2x + \sin 8x$  только если  $\sin 2x = 0$ . Отсюда вывод: формулы преобразования произведения в сумму нужно применять осторожно и всегда проверять результат.

## Пример 5

*Решение уравнения*

$$\text{Решим уравнение } \sin 5x \sin 3x = \frac{1}{4}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)] = \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 8x]$$

Получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 8x] = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x - \cos 8x = \frac{1}{2}$$

Преобразуем разность косинусов в произведение:

$$-2 \sin \frac{2x + 8x}{2} \sin \frac{2x - 8x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-2 \sin 5x \sin(-3x) = \frac{1}{2}$$

$$2 \sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{4}$$

Мы вернулись к исходному уравнению. Значит, нужно решать иначе.

Преобразуем иначе:  $\cos 2x - \cos 8x = \frac{1}{2}$ . Это уравнение можно решить, используя формулу разности косинусов, но оно сложное. Оставим как пример.

## Пример 6

*Общий алгоритм*

При работе с формулами преобразования произведения в сумму:

1. Определяем, какая формула нужна (произведение синусов, косинусов или смешанное).
2. Применяем соответствующую формулу.
3. При решении уравнений полученную сумму или разность дальше преобразуем или решаем.

## Задачи

1. Преобразуйте в сумму или разность:

1)  $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

5)  $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$

9)  $\sin 50^\circ \cos 10^\circ$

2)  $\sin 105^\circ \sin 15^\circ$

6)  $\cos 70^\circ \cos 10^\circ$

10)  $\sin 3x \sin x$

3)  $\sin 50^\circ \sin 10^\circ$

7)  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

11)  $\cos 5x \cos 2x$

4)  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$

8)  $\sin 105^\circ \cos 15^\circ$

12)  $\sin 4x \cos 2x$

**2. Упростите выражения:**

1)  $\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x$

6)  $2 \cos 3x \cos x$

10)  $\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \sin 3x \sin x$

2)  $\sin 5x \sin 2x - \cos 5x \cos 2x$

7)  $2 \sin 3x \sin x$

11)  $\cos x \cos 2x + \cos 2x \cos 3x + \cos 3x \cos x$

3)  $\sin 4x \cos 2x + \cos 4x \sin 2x$

8)  $\frac{\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x}{\sin 2x}$

12)  $\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos x$

4)  $\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x$

9)  $\frac{\sin 5x \sin 3x + \cos 5x \cos 3x}{\cos 2x}$

5)  $2 \sin 3x \cos x$

**3. Докажите тождества:**

1)  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

4)  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

8)  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  (частный случай)

2)  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

5)  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$

9)  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  (можно получить через эти формулы)

3)  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

6)  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

10)  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

7)  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  (частный случай)

11)  $\sin 4x = 4 \sin x \cos x - 8 \sin^3 x \cos x$

12)  $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

**4. Решите уравнения:**

1)  $\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{4}$

5)  $\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}$

9)  $\sin 3x \sin x - \cos 3x \cos x = -\frac{1}{2}$

2)  $\cos 5x \cos 3x = \frac{1}{4}$

6)  $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}$

10)  $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{1}{2}$

3)  $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{4}$

7)  $\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x = \frac{1}{2}$

11)  $\sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x$

4)  $\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}$

8)  $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12)  $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$

**5. Вычислите значения выражений (без калькулятора):**

1)  $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

5)  $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$

9)  $\sin 45^\circ \cos 15^\circ$

2)  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$

6)  $\sin 105^\circ \cos 15^\circ$

10)  $\sin 60^\circ \sin 30^\circ$

3)  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

7)  $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$

11)  $\cos 60^\circ \cos 30^\circ$

4)  $\sin 105^\circ \sin 15^\circ$

8)  $\cos 45^\circ \cos 15^\circ$

12)  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ$

**6. Задачи повышенной сложности:**

1) Докажите, что  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

3) Докажите, что  $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$

2) Докажите, что  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

4) Докажите, что  $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

5) Вычислите  $\sin 18^\circ \sin 54^\circ$

6) Вычислите  $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$

7) Решите уравнение:  $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$

8) Решите уравнение:  $\cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{4} \cos 4x$

9) Докажите, что  $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$

10) Докажите, что  $\sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x$

11) Докажите, что  $\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \sin 3x$

12) Докажите, что  $\cos x \cos(60^\circ - x) \cos(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \cos 3x$

# Практика по блоку 5

## Теория

В этом блоке мы изучили формулы преобразования суммы в произведение и произведения в сумму:

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

Эти формулы позволяют:

- Упрощать тригонометрические выражения;
- Решать уравнения, раскладывая на множители;
- Вычислять значения произведений тригонометрических функций;
- Доказывать тождества.

В этой главе собраны задачи на все формулы этого блока вперемешку. Ваша задача — определить, какую формулу нужно применить.

## Задачи

1. Преобразуйте в произведение:

- |                                    |                        |                                     |
|------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ | 5) $\sin 5x + \sin 3x$ | 9) $\sin 45^\circ + \sin 15^\circ$  |
| 2) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ | 6) $\sin 5x - \sin 3x$ | 10) $\sin 45^\circ - \sin 15^\circ$ |
| 3) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ | 7) $\cos 5x + \cos 3x$ | 11) $\cos 45^\circ + \cos 15^\circ$ |
| 4) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$ | 8) $\cos 5x - \cos 3x$ | 12) $\cos 45^\circ - \cos 15^\circ$ |

2. Преобразуйте в сумму или разность:

- |                                   |                                   |                       |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| 1) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$  | 5) $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$ | 9) $\sin 5x \cos 3x$  |
| 2) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$  | 6) $\sin 105^\circ \cos 15^\circ$ | 10) $\sin 4x \sin 2x$ |
| 3) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$  | 7) $\sin 5x \sin 3x$              | 11) $\cos 4x \cos 2x$ |
| 4) $\sin 105^\circ \sin 15^\circ$ | 8) $\cos 5x \cos 3x$              | 12) $\sin 4x \cos 2x$ |

3. Упростите выражения:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$ | 4) $\frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$ | 8) $\sin 5x \sin 3x - \cos 5x \cos 3x$                                    |
| 2) $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos 5x - \cos 3x}$ | 5) $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x$           | 9) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$  |
| 3) $\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$ | 6) $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x$           | 10) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$ |
|  | 7) $\sin 5x \sin 3x + \cos 5x \cos 3x$           |   |

$$11) \frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$$

$$12) \frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$$

#### 4. Докажите тождества:

$$1) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$5) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$9) \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$2) \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$6) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$10) \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$7) \sin 2x + \sin 2y = 2 \sin(x+y) \cos(x-y)$$

$$11) \sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$4) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$8) \cos 2x - \cos 2y = -2 \sin(x+y) \sin(x-y)$$

$$12) \sin 3x \cos x = \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 4x]$$

#### 5. Решите уравнения:

$$1) \sin 5x + \sin 3x = 0$$

$$5) \sin 5x \sin 3x = \frac{1}{4}$$

$$9) \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$2) \sin 5x - \sin 3x = 0$$

$$6) \cos 5x \cos 3x = \frac{1}{4}$$

$$10) \sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$$

$$3) \cos 5x + \cos 3x = 0$$

$$7) \sin 5x \cos 3x = \frac{1}{4}$$

$$11) \sin x \sin 2x = \cos x \cos 2x$$

$$4) \cos 5x - \cos 3x = 0$$

$$8) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$12) \sin x \cos 2x = \cos x \sin 2x$$

#### 6. Вычислите значения выражений (без калькулятора):

$$1) \sin 75^\circ \sin 15^\circ$$

$$5) \cos 105^\circ \cos 15^\circ$$

$$9) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ$$

$$2) \cos 75^\circ \cos 15^\circ$$

$$6) \sin 105^\circ \cos 15^\circ$$

$$10) \cos 75^\circ - \cos 15^\circ$$

$$3) \sin 75^\circ \cos 15^\circ$$

$$7) \sin 75^\circ + \sin 15^\circ$$

$$11) \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$$

$$4) \sin 105^\circ \sin 15^\circ$$

$$8) \sin 75^\circ - \sin 15^\circ$$

$$12) \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$$

#### 7. Задачи повышенной сложности:

$$1) \text{ Докажите, что } \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$$

$$5) \text{ Докажите, что } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

$$9) \text{ Найдите сумму } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$$

$$2) \text{ Докажите, что } \cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$$

$$6) \text{ Докажите, что } \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$$

$$10) \text{ Найдите сумму } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$$

$$3) \text{ Докажите, что } \sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$7) \text{ Решите уравнение: } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

$$11) \text{ Докажите, что } \sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$4) \text{ Докажите, что } \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$8) \text{ Решите уравнение: } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$$

$$12) \text{ Докажите, что } \cos x \cos(60^\circ - x) \cos(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \cos 3x$$

# Упрощение выражений с одним углом

## Теория

В этой главе мы рассмотрим различные приёмы упрощения тригонометрических выражений, содержащих функции одного и того же угла. Здесь могут применяться все изученные ранее формулы: основное тождество, формулы приведения, формулы двойного и половинного угла.

### Основные приёмы:

- Приведение к общему знаменателю;
- Вынесение общего множителя;
- Использование основного тождества  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;
- Замена 1 на  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ;
- Преобразование сумм в произведения;
- Понижение степени с помощью формул  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  и  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ;
- Выражение всех функций через синус и косинус.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Упрощение с приведением к общему знаменателю*

Упростим выражение  $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha}$ .

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} = \frac{(1 - \sin \alpha) + (1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$$

### Пример 2

*Упрощение с использованием основного тождества*

Упростим  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ .

Заметим, что  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

Можно также выразить через  $\sin 2\alpha$ :  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$ , тогда:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

### Пример 3

*Упрощение с понижением степени*

Упростим  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

Используем формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Тогда:

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha)}{4} = \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{4} = \frac{\sin^2 2\alpha}{4}$$

### Пример 4

*Упрощение с заменой тангенса*

Упростим  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

Так как  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , то:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

## Пример 5

*Упрощение с вынесением общего множителя*

Упростим  $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha$ .

Вынесем  $\sin \alpha$  за скобки:

$$\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cdot 1 = \sin \alpha$$

## Пример 6

*Общий алгоритм*

При упрощении тригонометрических выражений с одним углом:

1. Приводим всё к общему знаменателю, если есть дроби.
2. Используем основное тождество для замены  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .
3. Применяем формулы понижения степени, если есть квадраты.
4. Выражаем всё через синус и косинус, если есть тангенс или котангенс.
5. Ищем возможность вынести общий множитель.
6. В конце проверяем, можно ли ещё что-то упростить.

## Задачи

1. Упростите выражения:

1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

2)  $1 - \sin^2 \alpha$

3)  $1 - \cos^2 \alpha$

4)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

5)  $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha}$

6)  $\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}$

7)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

8)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

9)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

10)  $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

11)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

12)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$

2. Упростите выражения с вынесением общего множителя:

1)  $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha$

2)  $\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha$

3)  $\sin^3 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$

4)  $\cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha$

5)  $\sin^5 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha$

6)  $\cos^5 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha$

7)  $\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$

8)  $\cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos^3 \alpha$

9)  $\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha$

10)  $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha$

11)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

12)  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

3. Упростите, используя формулы понижения степени:

1)  $\sin^2 \alpha$

2)  $\cos^2 \alpha$

3)  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

4)  $\sin^4 \alpha$

5)  $\cos^4 \alpha$

6)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$

7)  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$

8)  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

9)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

10)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

11)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

12)  $\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}$

## 4. Упростите выражения с тангенсом и котангенсом:

1)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$

2)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$

3)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

4)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

5)  $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

6)  $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

7)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$

8)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$

9)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha$

10)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$

11)  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

12)  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

## 5. Докажите тождества:

1)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

2)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

3)  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

4)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

5)  $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \left( \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \right)^2$

6)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

7)  $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$

8)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

10)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

11)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

12)  $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

## 6. Задачи повышенной сложности:

1) Упростите:  $\frac{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}}$

2) Упростите:  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

3) Упростите:  $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

4) Докажите, что  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

5) Докажите, что  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 4 \cos 2\alpha$

6) Найдите все значения  $\alpha$ , при которых выражение  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$  не определено7) Найдите наибольшее значение выражения  $\sin \alpha + \cos \alpha$ 8) Найдите наименьшее значение выражения  $\sin \alpha - \cos \alpha$ 9) Найдите наибольшее значение выражения  $\sin \alpha \cos \alpha$ 10) Найдите наибольшее значение выражения  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha$ 11) Найдите наименьшее значение выражения  $\sin^2 \alpha - \cos \alpha$ 12) При каких значениях  $\alpha$  выражение  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$  равно  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ?

# Упрощение выражений с двумя углами

## Теория

В этой главе мы рассмотрим упрощение тригонометрических выражений, содержащих функции двух различных углов. Здесь могут применяться все изученные формулы: сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение и произведения в сумму.

### Основные приёмы:

- Использование формул сложения для  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ,  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ ;
- Преобразование суммы или разности функций в произведение;
- Преобразование произведения функций в сумму или разность;
- Выражение всех функций через синусы и косинусы;
- Использование формул приведения, если углы связаны (например,  $\alpha$  и  $90^\circ - \alpha$ ).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Упрощение с помощью формул сложения*

Упростим  $\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$ .

Это выражение сворачивается по формуле синуса разности:

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta = \sin((\alpha + \beta) - \beta) = \sin \alpha$$

### Пример 2

*Упрощение с помощью преобразования суммы в произведение*

Упростим  $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$ .

Применяем формулы:

$$\sin 5x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x + 3x}{2} \cos \frac{5x - 3x}{2} = 2 \sin 4x \cos x$$

$$\cos 5x + \cos 3x = 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \cos \frac{5x - 3x}{2} = 2 \cos 4x \cos x$$

Тогда:

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \sin 4x \cos x}{2 \cos 4x \cos x} = \operatorname{tg} 4x$$

(при  $\cos x \neq 0$  и  $\cos 4x \neq 0$ )

### Пример 3

*Упрощение с помощью преобразования произведения в сумму*

Упростим  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$ .

Это выражение сворачивается по формуле синуса суммы:

$$\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ = \sin(75^\circ + 15^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

### Пример 4

*Упрощение с использованием формул приведения*

Упростим  $\sin(90^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \beta) + \cos(90^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \beta)$ .

Сначала применим формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

Тогда выражение принимает вид:

$$\cos \alpha \cdot (-\cos \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$$

## Пример 5

Упрощение сложного выражения

Упростим  $\frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 4x}$ .

Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin \frac{2x + 4x}{2} \cos \frac{2x - 4x}{2} = 2 \sin 3x \cos(-x) = 2 \sin 3x \cos x$$

$$\cos 2x - \cos 4x = -2 \sin \frac{2x + 4x}{2} \sin \frac{2x - 4x}{2} = -2 \sin 3x \sin(-x) = 2 \sin 3x \sin x$$

Тогда:

$$\frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x \cos x}{2 \sin 3x \sin x} = \operatorname{ctg} x$$

(при  $\sin 3x \neq 0$ ,  $\sin x \neq 0$ )

## Пример 6

Общий алгоритм

При упрощении тригонометрических выражений с двумя углами:

1. Смотрим, можно ли свернуть выражение по формулам сложения.
2. Если нет, пробуем преобразовать сумму или разность в произведение.
3. Если есть произведение, пробуем преобразовать его в сумму.
4. Применяем формулы приведения, если углы связаны.
5. Упрощаем полученное выражение.

## Задачи

1. Упростите, используя формулы сложения:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$ | 5) $\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x$ | 9) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ$    |
| 2) $\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$ | 6) $\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$ | 10) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$   |
| 3) $\sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta$ | 7) $\sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x$   | 11) $\sin 105^\circ \cos 45^\circ - \cos 105^\circ \sin 45^\circ$ |
| 4) $\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta$ | 8) $\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$   | 12) $\cos 105^\circ \cos 45^\circ + \sin 105^\circ \sin 45^\circ$ |

2. Упростите, используя преобразование суммы в произведение:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$ | 5) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$ | 9) $\frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 4x}$  |
| 2) $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos 5x - \cos 3x}$ | 6) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$ | 10) $\frac{\sin 2x - \sin 4x}{\cos 2x + \cos 4x}$ |
| 3) $\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$ | 7) $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$ | 11) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$   |
| 4) $\frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$ | 8) $\frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$ | 12) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x}$   |

3. Упростите, используя преобразование произведения в сумму:

- |  |  |                        |
|--|--|------------------------|
| 1) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$ | 5) $\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$ | 9) $2 \sin 3x \cos x$  |
| 2) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ$ | 6) $\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x$ | 10) $2 \cos 3x \cos x$ |
| 3) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$ | 7) $\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$ | 11) $2 \sin 3x \sin x$ |
| 4) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \sin 15^\circ$ | 8) $\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x$ | 12) $2 \cos 3x \sin x$ |

#### 4. Упростите с использованием формул приведения:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sin(90^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \beta) + \cos(90^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \beta)$ | $\sin(180^\circ - \alpha) \sin(90^\circ + \beta)$  | 8) $\cos(\pi + \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) - \sin(\pi + \alpha) \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$      |
| 2) $\cos(90^\circ - \alpha) \cos(180^\circ + \beta) - \sin(90^\circ - \alpha) \sin(180^\circ + \beta)$ | 5) $\sin(90^\circ + \alpha) \sin(180^\circ - \beta) + \cos(90^\circ + \alpha) \cos(180^\circ - \beta)$ | 9) $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \sin(\pi + \beta) + \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cos(\pi + \beta)$    |
| 3) $\sin(180^\circ + \alpha) \cos(90^\circ - \beta) - \cos(180^\circ + \alpha) \sin(90^\circ - \beta)$ | 6) $\cos(90^\circ + \alpha) \cos(180^\circ + \beta) - \sin(90^\circ + \alpha) \sin(180^\circ + \beta)$ | 10) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \cos(2\pi - \beta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \sin(2\pi - \beta)$ |
| 4) $\cos(180^\circ - \alpha) \cos(90^\circ + \beta) + \sin(180^\circ - \alpha) \sin(90^\circ + \beta)$ | 7) $\sin(\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \beta) + \cos(\pi - \alpha) \sin(\frac{\pi}{2} + \beta)$   |   |

#### 5. Докажите тождества:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$            | 5) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$  | 9) $\sin 2x + \sin 2y = 2 \sin(x+y) \cos(x-y)$                                      |
| 2) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$            | 6) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$  | 10) $\cos 2x - \cos 2y = -2 \sin(x+y) \sin(x-y)$                                    |
| 3) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$ | 7) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}$ | 11) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$   |
| 4) $\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$ | 8) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}$      | 12) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$ |

#### 6. Задачи повышенной сложности:

- |   |   |
|---|---|
| 1) Упростите: $\frac{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$           | 7) Найдите значение выражения $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$   |
| 2) Упростите: $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}$           | 8) Найдите значение выражения $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$   |
| 3) Докажите, что $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$       | 9) Найдите значение выражения $\frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$   |
| 4) Докажите, что $\frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x$     | 10) Докажите, что $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  |
| 5) Докажите, что $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos x - \cos 3x} = \operatorname{ctg} 2x$      | 11) Докажите, что $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 70^\circ = \frac{1}{2}$   |
| 6) Найдите значение выражения $\sin 20^\circ \cos 50^\circ + \cos 20^\circ \sin 50^\circ$ | 12) Докажите, что $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$ |

# Доказательство тождеств

## Теория

В этой главе мы рассмотрим, как доказывать тригонометрические тождества. Это важный навык, который проверяет понимание всех изученных формул и умение их применять.

### Основные методы доказательства тождеств:

- Преобразование левой части к правой (или наоборот);
- Преобразование обеих частей к одному и тому же выражению;
- Использование известных формул (основное тождество, формулы сложения, двойного угла и т.д.);
- Приведение к общему знаменателю;
- Вынесение общего множителя;
- Замена 1 на  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ;
- Выражение всех функций через синус и косинус.

### План действий:

1. Начинаем с более сложной части (обычно левой).
2. Применяем формулы, стараясь упростить выражение.
3. Если зашли в тупик, пробуем преобразовать другую часть.
4. В конце проверяем, что обе части равны.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

### Пример 1

*Простое тождество*

Докажем, что  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .

Преобразуем левую часть как разность квадратов:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot 1 = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

Что и требовалось доказать.

### Пример 2

*Тождество с тангенсом*

Докажем, что  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$ .

Выразим левую часть через синус и косинус:

$$\frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha$$

### Пример 3

*Тождество с преобразованием суммы в произведение*

Докажем, что  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

Преобразуем числитель и знаменатель по формулам суммы в произведение:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

## Пример 4

Тождество с двойным углом

Докажем, что  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Используем формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

Тогда:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

## Пример 5

Сложное тождество

Докажем, что  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$ .

Преобразуем левую часть:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

Теперь преобразуем правую часть:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

Обе части равны. Тождество доказано.

## Пример 6

Общий алгоритм

При доказательстве тригонометрических тождеств:

1. Начинаем с более сложной части.
2. Применяем известные формулы для упрощения.
3. Если необходимо, приводим к общему знаменателю.
4. Выражаем всё через синусы и косинусы.
5. В конце убеждаемся, что обе части равны.

## Задачи

1. Докажите тождества, используя основное тригонометрическое тождество:

1)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

5)  $\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$

9)  $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

2)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

6)  $\frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$

10)  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

3)  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

7)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

11)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

4)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

8)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

12)  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$

2. Докажите тождества с тангенсом и котангенсом:

1)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

5)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

9)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$

2)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

6)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

10)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$

3)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$

7)  $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

11)  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

4)  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

8)  $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

12)  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

3. Докажите тождества, используя формулы двойного угла:

1)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

6)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

10)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

2)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

7)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

11)  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

3)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

8)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

12)  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

5)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

9)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

4. Докажите тождества, используя формулы половинного угла:

1)  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$

5)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

9)  $\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$

2)  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

6)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$

10)  $\operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$

3)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

7)  $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}$

11)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

4)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

8)  $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}$

12)  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

5. Докажите тождества, используя формулы сложения и преобразования:

1)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$

5)  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

9)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

2)  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$

6)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$

10)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

3)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}$

7)  $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$

11)  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

4)  $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}$

8)  $\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$

12)  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

6. Докажите сложные тождества:

1)  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

4)  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 4 \cos 2\alpha$

7)  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$

2)  $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

5)  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

8)  $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha$

3)  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$

6)  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

9)  $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$

$$10) \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$$

$$11) \frac{\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x}{\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x} = 2 - \quad 12) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$$

# Вычисление значений тригонометрических выражений

## Теория

В этой главе мы рассмотрим задачи на вычисление значений тригонометрических выражений. Здесь могут быть даны значения одних функций, а требуется найти другие, или нужно вычислить значение сложного выражения, используя известные формулы.

### Основные типы задач:

- Нахождение значений тригонометрических функций по известному значению одной из них (с учётом четверти);
- Вычисление значений выражений, содержащих функции от разных углов;
- Использование формул приведения для вычисления значений функций от больших углов;
- Применение формул сложения, двойного и половинного угла;
- Использование формул преобразования суммы в произведение и произведения в сумму.

### План действий:

1. Определяем, какие формулы могут пригодиться.
2. Если дано значение одной функции и четверть, находим остальные функции.
3. Подставляем найденные значения в выражение.
4. Упрощаем, используя известные формулы.
5. Получаем числовой ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Вычисление по известному синусу*

Известно, что  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\alpha$  во II четверти. Найдите  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ .  
Сначала найдём  $\cos \alpha$ . Из основного тождества:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Во II четверти косинус отрицателен, поэтому  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

Теперь:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{4}{3}$$

## Пример 2

*Вычисление значения выражения*

Найдите значение выражения  $\frac{\sin 105^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ - \cos 15^\circ}$ .

Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos 105^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Тогда:

$$\frac{\sin 105^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\frac{\sqrt{6}}{2}} = -1$$

### Пример 3

*Вычисление с использованием формул приведения*

Вычислите  $\sin 210^\circ + \cos 315^\circ$ .

Используем формулы приведения:

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Сумма: } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

### Пример 4

*Вычисление с использованием формул двойного угла*

Известно, что  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\alpha$  в I четверти. Найдите  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

Сначала найдём  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  (в I четверти косинус положителен).

Тогда:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24/25}{7/25} = \frac{24}{7}$$

### Пример 5

*Вычисление с использованием формул половинного угла*

Вычислите  $\sin 15^\circ$ .

Используем формулу  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$  при  $\alpha = 30^\circ$ :

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Можно также получить более красивый ответ:  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

### Пример 6

*Общий алгоритм*

При вычислении значений тригонометрических выражений:

1. Если дано значение одной функции и четверть, находим остальные.
2. Если нужно вычислить значение функции от нестандартного угла, представляем его как сумму или разность табличных углов.
3. Применяем соответствующие формулы (приведения, сложения, двойного угла и т.д.).
4. Упрощаем и получаем ответ.

# Задачи

## 1. Найдите значения тригонометрических функций, если:

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| 1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , $\alpha$ в I. Найдите $\cos \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ , $\operatorname{ctg} \alpha$   | 4) $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ , $\alpha$ в II. Найдите $\sin \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ , $\operatorname{ctg} \alpha$ | 7) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ , $\alpha$ в I. Найдите $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$    | 10) $\cos \alpha = 0.8$ , $\alpha$ в IV. Найдите $\sin \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ |
| 2) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ , $\alpha$ в II. Найдите $\cos \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ , $\operatorname{ctg} \alpha$ | 5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ , $\alpha$ в I. Найдите $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , $\operatorname{ctg} \alpha$     | 8) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{8}{15}$ , $\alpha$ в II. Найдите $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ | 11) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , $\alpha$ в I. Найдите $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$    |
| 3) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , $\alpha$ в IV. Найдите $\sin \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ , $\operatorname{ctg} \alpha$  | 6) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ , $\alpha$ в II. Найдите $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , $\operatorname{ctg} \alpha$  | 9) $\sin \alpha = 0.6$ , $\alpha$ в I. Найдите $\cos \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$  | 12) $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ , $\alpha$ в I. Найдите $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$   |

## 2. Вычислите, используя формулы приведения:

- |                                  |                                   |                                   |                                    |
|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin 120^\circ$              | 4) $\operatorname{ctg} 120^\circ$ | 7) $\operatorname{tg} 240^\circ$  | 10) $\cos 315^\circ$               |
| 2) $\cos 135^\circ$              | 5) $\sin 210^\circ$               | 8) $\operatorname{ctg} 210^\circ$ | 11) $\operatorname{tg} 330^\circ$  |
| 3) $\operatorname{tg} 150^\circ$ | 6) $\cos 225^\circ$               | 9) $\sin 300^\circ$               | 12) $\operatorname{ctg} 300^\circ$ |

## 3. Вычислите, используя формулы сложения:

- |                                 |                                  |                                 |                                   |
|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sin 75^\circ$              | 4) $\sin 105^\circ$              | 7) $\sin 15^\circ$              | 10) $\sin 165^\circ$              |
| 2) $\cos 75^\circ$              | 5) $\cos 105^\circ$              | 8) $\cos 15^\circ$              | 11) $\cos 165^\circ$              |
| 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$ | 6) $\operatorname{tg} 105^\circ$ | 9) $\operatorname{tg} 15^\circ$ | 12) $\operatorname{tg} 165^\circ$ |

## 4. Вычислите значения выражений:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$   | 8) $\cos 105^\circ \cos 45^\circ - \sin 105^\circ \sin 45^\circ$          |
| 2) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ$   | 9) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$  |
| 3) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$   | 10) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$ |
| 4) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \sin 15^\circ$   | 11) $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$ |
| 5) $\sin 105^\circ \cos 45^\circ + \cos 105^\circ \sin 45^\circ$ | 12) $\frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$ |
| 6) $\sin 105^\circ \cos 45^\circ - \cos 105^\circ \sin 45^\circ$ |   |
| 7) $\cos 105^\circ \cos 45^\circ + \sin 105^\circ \sin 45^\circ$ |   |

## 5. Вычислите, используя формулы двойного угла:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\sin 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , $\alpha$ в I               | 7) $\sin 2\alpha$ , если $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ , $\alpha$ в IV                         |
| 2) $\cos 2\alpha$ , если $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , $\alpha$ в I               | 8) $\cos 2\alpha$ , если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$                            |
| 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$   | 9) $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , $\alpha$ в I        |
| 4) $\sin 2\alpha$ , если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$                 | 10) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , $\alpha$ в II      |
| 5) $\cos 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , $\alpha$ в II              | 11) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ , если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$       |
| 6) $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ , $\alpha$ в I | 12) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ , если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , $\alpha$ в I |

**6. Задачи повышенной сложности:**

1) Вычислите  $\sin 18^\circ$

2) Вычислите  $\cos 36^\circ$

3) Вычислите  $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ$

4) Вычислите  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

5) Вычислите  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

6) Вычислите  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$

7) Вычислите  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 70^\circ$

8) Вычислите  $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 70^\circ$

9) Найдите  $\sin \alpha$ , если  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$

10) Найдите  $\sin 2\alpha$ , если  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$

11) Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$

12) Найдите  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ , если  $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

# Практика на все-все приёмы

## Теория

Мы изучили все основные темы, связанные с упрощением тригонометрических выражений:

- Основное тригонометрическое тождество и его следствия;
- Тангенс и котангенс, связь с синусом и косинусом;
- Формулы приведения;
- Формулы сложения (синус, косинус, тангенс суммы и разности);
- Формулы двойного и половинного угла;
- Преобразование суммы в произведение;
- Преобразование произведения в сумму;
- Упрощение выражений с одним и двумя углами;
- Доказательство тождеств;
- Вычисление значений тригонометрических выражений.

В этой главе собраны задачи всех типов вперемешку — от простых до сложных. Ваша задача — определить, какой метод или комбинацию методов нужно применить в каждом конкретном случае.

## Задачи

1. Найдите значения тригонометрических функций:

- |                                  |                                   |                                   |                                    |
|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin 120^\circ$              | 4) $\operatorname{ctg} 210^\circ$ | 7) $\operatorname{tg} 300^\circ$  | 10) $\cos 360^\circ$               |
| 2) $\cos 135^\circ$              | 5) $\sin 225^\circ$               | 8) $\operatorname{ctg} 315^\circ$ | 11) $\operatorname{tg} 180^\circ$  |
| 3) $\operatorname{tg} 150^\circ$ | 6) $\cos 240^\circ$               | 9) $\sin 330^\circ$               | 12) $\operatorname{ctg} 270^\circ$ |

2. Упростите выражения:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$   | 5) $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha}$           | 9) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$  |
| 2) $1 - \cos^2 \alpha$   | 6) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ | 10) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ |
| 3) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$                  | 7) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$                                   | 11) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ |
| 4) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ | 8) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$                                   | 12) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ |

3. Вычислите, используя формулы сложения:

- |                                 |                                  |                                 |                                   |
|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sin 75^\circ$              | 4) $\sin 105^\circ$              | 7) $\sin 15^\circ$              | 10) $\sin 165^\circ$              |
| 2) $\cos 75^\circ$              | 5) $\cos 105^\circ$              | 8) $\cos 15^\circ$              | 11) $\cos 165^\circ$              |
| 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$ | 6) $\operatorname{tg} 105^\circ$ | 9) $\operatorname{tg} 15^\circ$ | 12) $\operatorname{tg} 165^\circ$ |

4. Упростите выражения с двумя углами:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$ | 3) $\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$ | 5) $\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$ |
| 2) $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos 5x - \cos 3x}$ | 4) $\frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$ | 6) $\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x$ |

7)  $\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$

8)  $\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x$

9)  $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

10)  $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$

11)  $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$

12)  $\frac{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$

## 5. Вычислите значения выражений:

1)  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

2)  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

3)  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$

4)  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \sin 15^\circ$

5)  $\sin 105^\circ \cos 45^\circ + \cos 105^\circ \sin 45^\circ$

6)  $\sin 105^\circ \cos 45^\circ - \cos 105^\circ \sin 45^\circ$

7)  $\cos 105^\circ \cos 45^\circ + \sin 105^\circ \sin 45^\circ$

8)  $\cos 105^\circ \cos 45^\circ - \sin 105^\circ \sin 45^\circ$

9)  $\sin 45^\circ \cos 15^\circ + \cos 45^\circ \sin 15^\circ$

10)  $\sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ$

11)  $\cos 45^\circ \cos 15^\circ + \sin 45^\circ \sin 15^\circ$

12)  $\cos 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ$

## 6. Докажите тождества:

1)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

2)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

3)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

4)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

5)  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

6)  $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

7)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$

8)  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$

9)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

10)  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

11)  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

12)  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

## 7. Задачи повышенной сложности:

1) Вычислите  $\sin 18^\circ$

2) Вычислите  $\cos 36^\circ$

3) Вычислите  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

4) Вычислите  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

5) Вычислите  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$

6) Вычислите  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ +$

$\sin 70^\circ$

7) Вычислите  $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 70^\circ$

8) Найдите  $\sin \alpha$ , если  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$

9) Найдите  $\sin 2\alpha$ , если  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$

10) Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$

11) Найдите  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ , если  $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

12) Найдите  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ , если  $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$

# Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Тригонометрические выражения — это та тема, где многие школьники начинают паниковать. Слишком много формул, слишком много разных преобразований, слишком легко запутаться в знаках... Но теперь вы знаете, что за всей этой сложностью скрывается стройная и красивая система.

В этой книге мы разобрали все основные типы тригонометрических выражений и методы их упрощения:

- начали с самого простого — основного тригонометрического тождества, которое связывает синус и косинус одного угла;
- познакомились с тангенсом и котангенсом, научились выражать их через синус и косинус;
- освоили формулы приведения — правила, позволяющие сводить функции от любых углов к функциям от острых углов;
- изучили формулы сложения, которые позволяют находить синус, косинус и тангенс суммы и разности;
- разобрались с формулами двойного и половинного угла;
- научились преобразовывать сумму тригонометрических функций в произведение и наоборот;
- применили все эти знания для упрощения выражений с одним и двумя углами;
- научились доказывать тригонометрические тождества;
- освоили вычисление значений тригонометрических выражений.

Но главное — мы научились главному: видеть, какие формулы нужно применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «упростите, используя формулу синуса двойного угла» или «здесь нужно применить преобразование суммы в произведение». Вы просто видите выражение и должны сами понять, как его упростить. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте [books.mrepetitor.com](https://books.mrepetitor.com) вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте [study.mrepetitor.com](https://study.mrepetitor.com). Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

*Дмитрий Трещёв*